3 Potencias y raíces de números reales

1. El 3 de marzo de 1972 se lanzó el *Pioneer 10* desde Cabo Kennedy, diseñado para explorar el espacio más allá del sistema solar. La nave tardará unos 80 000 años en llegar a la estrella más cercana, Alfa Centauro, situada a 4,3 años luz de la Tierra, y seguirá el viaje hasta un punto cerca del límite de las constelaciones de Tauro y Orión.

¿Cuántos kilómetros tiene que recorrer para llegar a Alfa Centauro? (1 año luz = $9{,}46 \cdot 10^{12}$ km)

2. Asocia cada enunciado de la lista A con un resultado de la lista B, de modo que sea razonable.

Expresa todas las medidas en metros y en notación científica.

Lista A
Diámetro del virus de la hepatitis B
Distancia entre dos galaxias
Distancia entre dos puntos del planeta Tierra
Altura de un árbol
Ancho de un folio DIN A-4
Distancia aproximada de la Tierra al Sol
Tamaño de un ácaro

Lista B
150 millones de km
45 nanómetros
21 cm
0,5 mm
30 millones de años luz
3 metros
2 500 km

3. La memoria RAM de cierto ordenador personal tiene 256 Mb. Obtén el número de bits de la memoria, expresándolo como una potencia de 2.

Datos: 1 Mb = 1 024 kb, 1 kb = 1 024 bytes.

4. Calcula:

a) $2^{-4} \cdot 2^4$ b) $2^{16} + 2^{16}$ c) $2^{-1} + 2^{-2}$ d) $(2^{-1} \cdot 2^{-2})^{-1}$

5. Completa la siguiente tabla:

a	b	$a + b$	$a \cdot b$
$3 \cdot 7^3$	$4 \cdot 7^3$		
$2ab^2$	$3ab^2$		

6. Calcula:

a) $\dfrac{1}{2 \cdot 3^{-3}} + 2^{-1}$ b) $\dfrac{3 \cdot 5^{-1}}{2^{-2} \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 3^{-2}}$

7. Indica cuál de las siguientes expresiones es mayor:

a) $\sqrt{8} + 5\sqrt{2}$ b) $\sqrt{18} + \sqrt{32}$ c) $\sqrt{50} + 4\sqrt{2} - \sqrt{8}$

8. Se quiere construir un triángulo equilátero de altura $5\sqrt{3}$ cm utilizando alambre. ¿Cuánto es necesario para construirlo?

9. Calcula y simplifica:

a) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2^6}}\right)^2$ b) $\dfrac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{4} - (2 + \sqrt{3})$

SOLUCIONES

1. Tiene que recorrer 4 años luz.

$4{,}3 \cdot 9{,}46 \cdot 10^{12} = 4{,}0678 \cdot 10^{13}$ km

2.

Virus de la hepatitis B	45 nanómetros	$4{,}5 \cdot 10^{-8}$ m
Distancia entre galaxias	30 millones de años luz	$2{,}833 \cdot 10^{23}$ m
Puntos del planeta Tierra	2 500 km	$2{,}5 \cdot 10^{3}$ m
Altura de un árbol	3 metros	3 m
Ancho DIN A-4	21 cm	$0{,}21 \cdot 10^{-2}$ m
Distancia de la Tierra al Sol	150 millones de kilómetros	$1{,}5 \cdot 10^{-11}$ m
Tamaño de un ácaro	0,5 mm	$0{,}5 \cdot 10^{-3}$ m

3. 256 Mb = 256 · 1 024 · 1 024 bytes

$256 \cdot 1\,024 \cdot 1\,024 = 2^8 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{28}$

Luego 256 Mb son 2^{28} bytes.

4. a) $2^{-4} \cdot 2^4 = 2^0 = 1$

b) $2^{16} + 2^{16} = 2^{16}(1 + 1) = 2^{16} \cdot 2 = 2^{17}$

c) $2^{-1} + 2^{-2} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2^2} = \dfrac{3}{4}$

d) $(2^{-1} \cdot 2^{-2})^{-1} = (2^{-1+(-2)})^{-1} = (2^{-3})^{-1} = 2^3 = 8$

5.

a	b	$a + b$	$a \cdot b$
$3 \cdot 7^3$	$4 \cdot 7^3$	$3 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^3 = 7^3(3 + 4) = 7^3 \cdot 7 = 7^4$	$3 \cdot 7^3 \cdot 4 \cdot 7^3 = 12 \cdot 7^{3+3} = 12 \cdot 7^6$
$2ab^2$	$3ab^2$	$2ab^2 + 3ab^2 = ab^2(2 + 3) = 5ab^2$	$2ab^2 \cdot 3ab^2 = 6a^2b^4$

6. a) $\dfrac{1}{2 \cdot 3^{-3}} + 2^{-1} = \dfrac{3^3}{2} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{3^3 + 1}{2} = \dfrac{27 + 1}{2} = \dfrac{28}{2} = 14$

b) $\dfrac{3 \cdot 5^{-1}}{2^{-2} \cdot 7} + \dfrac{1}{7 \cdot 3^{-2}} = \dfrac{3 \cdot 2^2}{5 \cdot 7} + \dfrac{3^2}{7} = \dfrac{3 \cdot 2^2}{5 \cdot 7} + \dfrac{3^2 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \dfrac{12 + 45}{35} = \dfrac{57}{35}$

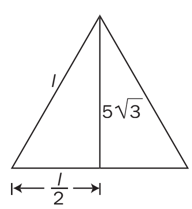
7. a) $\sqrt{8} + 5\sqrt{2} = \sqrt{2^3} + 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

b) $\sqrt{18} + \sqrt{32} = \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{2^5} = 3\sqrt{2} + 2^2\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

c) $\sqrt{50} + 4\sqrt{2} - \sqrt{8} = \sqrt{5^2 \cdot 2} + 4\sqrt{2} - \sqrt{2^3} = 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 7\sqrt{2}$

Luego las tres expresiones son iguales.

8.



$(5\sqrt{3})^2 + \left(\dfrac{l}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow 25 \cdot 3 = l^2 - \dfrac{l^2}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow 75 = \dfrac{3}{4} l^2 \Rightarrow l^2 = \dfrac{300}{3} = 100 \Rightarrow l = 10$

Se necesitan 30 cm de alambre.

9. a) $\left(\sqrt{\sqrt[3]{2^6}}\right)^2 = \sqrt{\sqrt[3]{2^{12}}} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$

b) $\dfrac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{4} - (2 + \sqrt{3}) =$

$= \dfrac{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2}{4} - (2 + \sqrt{3}) =$

$= \dfrac{2 + 2\sqrt{12} + 6}{4} - (2 + \sqrt{3}) =$

$= \dfrac{8 + 2\sqrt{2^2 \cdot 3}}{4} - (2 + \sqrt{3}) =$

$= \dfrac{8 + 4\sqrt{3}}{4} - (2 + \sqrt{3}) =$

$= (2 + \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3}) = 0$

3 Potencias y raíces de números reales

1. Escribe en forma de potencias de 10:

a) $1\,000^3$ b) $0{,}01$ c) $\dfrac{1}{0{,}001}$ d) 1 e) $0{,}001^3$

2. Expresa como una potencia de 2:

a) 64 b) $\dfrac{1}{8}$ c) 4^2 d) $2^{-1} \cdot 2^3$ e) $(4^3)^2$

3. Completa las siguientes igualdades:

a) $2^2 \cdot 2^{\boxed{?}} = 2^5$ c) $(2^2)^{\boxed{?}} = 2^6$ e) $3^{\boxed{?}} = \dfrac{1}{27}$

b) $[\boxed{?}]^3 = -27$ d) $(3^2)^{-4} = \dfrac{1}{\boxed{?}}$ f) $a^{\boxed{?}} = \dfrac{1}{a^6}$

4. El número de moléculas que hay en un gramo de hidrógeno es 301 000 000 000 000 000 000 000. ¿Se puede manejar de forma más cómoda? Exprésalo en notación científica.

5. Realiza las siguientes operaciones en notación científica:

a) $(4 \cdot 10^{-3}) \cdot (7 \cdot 10^{12})$ b) $(3{,}25 \cdot 10^6) : (2{,}3 \cdot 10^{-2})$ c) $(234{,}23 \cdot 10^7) \cdot (12{,}034 \cdot 10^{-3})$

6. La galaxia Andrómeda está a 2 millones de años luz de nosotros. Esta distancia es 10 veces mayor que la de las nubes de Magallanes. ¿Cuánto distan de nosotros estas últimas? Expresa la distancia en años luz y en notación científica.

7. Calcula las siguientes raíces expresando el resultado en forma de potencia:

a) $\sqrt{7^2}$ b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}}$ c) $\sqrt[5]{32}$ d) $\sqrt{\dfrac{4}{9}}$

8. Simplifica los siguientes radicales:

a) $\sqrt[3]{625}$ b) $\sqrt[4]{9^3}$ c) $\sqrt{32\,768}$ d) $\sqrt[5]{3^6 \cdot 2^{10}}$

9. a) Comprueba que $\sqrt{300}$ es un cierto número de veces $\sqrt{3}$.

b) Utilizando el resultado anterior, calcula: $\sqrt{300} + \sqrt{3}$

c) ¿Podemos hacer lo mismo con $\sqrt{500} + \sqrt{3}$, o hay que dejarlo indicado? ¿Por qué?

10. a) Reduce a común índice: $\sqrt{5}$ $\sqrt[3]{5}$ $\sqrt[4]{5}$

b) Utiliza el resultado anterior para calcular $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5}$

c) Expresa el producto obtenido como una potencia de 5.

d) Realiza ahora el producto, considerando los radicales como potencias de exponente fraccionario. Comprueba la coincidencia de resultados.

11. Ordena los siguientes radicales de menor a mayor:

$\sqrt[3]{2^2}$ $\sqrt[5]{8}$ $\sqrt[4]{2^3}$

12. Expresa como una potencia única las siguientes expresiones:

a) $\sqrt{7} \cdot 7^{\frac{5}{2}}$ b) $(2\sqrt{2^3})^2$

SOLUCIONES

1. a) $1\,000^3 = (10^3)^3 = 10^9$

b) $0{,}01 = 10^{-2}$

c) $\dfrac{1}{0{,}001} = \dfrac{1}{10^{-3}} = 10^3$

d) $1 = 10^0$

e) $0{,}001^3 = (10^{-3})^3 = 10^{-9}$

2. a) $64 = 2^6$

b) $\dfrac{1}{8} = \dfrac{1}{2^3} = 2^{-3}$

c) $4^2 = (2^2)^2 = 2^4$

d) $2^{-1} \cdot 2^3 = 2^2$

e) $(4^3)^2 = (4)^6 = (2^2)^6 = 2^{12}$

3. a) $2^2 \cdot 2^3 = 2^5$

b) $[-3]^3 = -27$

c) $(2^2)^3 = 2^6$

d) $(3^2)^{-4} = \dfrac{1}{3^8}$

e) $3^{-3} = \dfrac{1}{27}$

f) $a^{-6} = \dfrac{1}{a^6}$

4. Sí. $3{,}01 \cdot 10^{23}$ moléculas.

5. a) $(4 \cdot 10^{-3}) \cdot (7 \cdot 10^{12}) = (7 \cdot 4)\,(10^{-3} \cdot 10^{12}) =$
$= 28 \cdot 10^9 = 2{,}8 \cdot 10^{10}$

b) $(3 \cdot 10^6) : (2{,}4 \cdot 10^{-2}) = (3 : 2{,}4) \cdot (10^6 : 10^{-2}) =$
$= 1{,}25 \cdot 10^8$

c) $(234{,}2 \cdot 10^7) \cdot (12 \cdot 10^{-3}) =$
$= (234{,}2 \cdot 12) \cdot (10^7 \cdot 10^{-3}) =$
$= (2\,810{,}4 \cdot 10^4) = 2{,}8104 \cdot 10^7$

6. Distancia Andrómeda = 2 millones de años luz = $= 2 \cdot 10^6$ años luz.

Distancia nubes Magallanes $= \dfrac{2 \cdot 10^6}{10}$ años luz =

$= 2 \cdot 10^5$ años luz

7. a) $\sqrt{7^2} = 7$

b) $\sqrt[3]{\dfrac{1}{8}} = \sqrt[3]{\dfrac{1}{2^3}} = \dfrac{1}{2}$

c) $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$

d) $\sqrt{\dfrac{4}{9}} = \sqrt{\dfrac{2^2}{3^2}} = \dfrac{2}{3}$

8. a) $\sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = 5\sqrt[3]{5}$

b) $\sqrt[4]{9^3} = \sqrt[4]{(3^2)^3} = \sqrt[4]{3^6} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3^2} = 3\sqrt[4]{3^2}$

c) $\sqrt{32\,768} = \sqrt{2^{15}} = \sqrt{2^{14} \cdot 2} = \sqrt{(2^7)^2 \cdot 2} =$
$= 2^7\sqrt{2}$

d) $\sqrt[5]{3^6 \cdot 2^{10}} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 3 \cdot (2^2)^5} = 3 \cdot 2^2\sqrt[5]{3}$

9. a) $\sqrt{300} = \sqrt{3 \cdot 10^2} = 10 \cdot \sqrt{3}$

b) $\sqrt{300} + \sqrt{3} = 10\sqrt{3} + \sqrt{3} = 11\sqrt{3}$

c) $\sqrt{500} + \sqrt{3} = \sqrt{5 \cdot 10^2} + \sqrt{3} =$
$= 10\sqrt{5} + \sqrt{3}$

Hay que dejarlo indicado, los radicales son distintos y no se puede sumar.

10. a) m.c.m. (2, 3, 4) = 12
$\sqrt{5} = \sqrt[12]{5^6};\ \sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4};\ \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$

b) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^6} \cdot \sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{5^3} =$
$= \sqrt[12]{5^6 \cdot 5^5 \cdot 5^3} = \sqrt[12]{5^{14}}$

c) $\sqrt[12]{5^{14}} = \sqrt[12]{5^{12}\ 5^2} = 5\sqrt[12]{5^2}$

d) $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$

11. $\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$

$\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{3}{5}}$

$\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$

Como $\dfrac{3}{5} < \dfrac{2}{3} < \dfrac{3}{4}$

Ordenados son: $\sqrt[5]{8},\ \sqrt[3]{2^2},\ \sqrt[4]{2^3}$

12. a) $\sqrt{7} \cdot 7^{\frac{5}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{2}} = 7^{\frac{1}{2}+\frac{5}{2}} = 7^{\frac{6}{10}}$

b) $(2\sqrt{2^3})^2 = 2^2\sqrt{2^6} = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$

2 Potencias y raíces de números reales

1. Dado el número $N = \dfrac{6^{-3} \cdot 10^{-4} \cdot 15^3}{24^7 \cdot 8^{-14} \cdot 48^3}$, expresa el número N de las siguientes formas:

a) Como un producto de potencias de 2, 3 y 5 de exponentes enteros.

b) Como una fracción cuyos términos sean potencias de 2, 3 y 5 de exponentes positivos.

2. Expresa en notación científica las siguientes magnitudes:

a) Diez millones de kilómetros en centímetros.

b) 35 decímetros cuadrados en kilómetros cuadrados.

c) 150 miligramos en toneladas.

d) 250 litros en milímetros cúbicos.

3. Escribe los números que resultan de efectuar las operaciones que los definen de dos formas: como producto de potencias de números primos de exponentes fraccionarios y como un solo radical:

$$A = \sqrt{2} \cdot 6^{\frac{1}{3}} \qquad B = \frac{\sqrt[3]{12}}{3 \cdot \sqrt{2}} \qquad C = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-2}}{\sqrt{6}}$$

4. Calcula el valor de x para que se verifiquen las siguientes igualdades:

a) $\sqrt[3]{\dfrac{2x+6}{5}} = 2$ b) $\sqrt[4]{x-1} = \sqrt{5}$ c) $3^{x+1} = \sqrt[3]{9}$ d) $3x = \sqrt[5]{27}$

5. De los siguientes pares de números reales, indica cuál es el mayor de los dos:

a) $A = \sqrt[3]{3}$ y $B = \sqrt{2}$ b) $A = 6^{\frac{2}{3}}$ y $B = \sqrt{12}$ c) $A = 8^{\frac{2}{3}}$ y $B = 2 \cdot \sqrt[6]{32}$

6. Opera y simplifica las siguientes expresiones:

a) $2\sqrt{6} - \sqrt{24} + 3\sqrt{54}$ b) $2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{48}$ c) $3\sqrt{80} + 10\sqrt{180} - 2\sqrt{980}$

7. Efectúa las siguientes operaciones con raíces, pasando previamente a potencias de exponente fraccionario y expresando los resultados en forma radical:

a) $\sqrt{7} \cdot \sqrt[3]{7^2} \cdot \sqrt[4]{7^3}$ b) $\dfrac{\sqrt[6]{7^5}}{\sqrt[4]{7}}$ c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{7^2}}}{\sqrt[4]{\sqrt{7}}}$

8. a) Si la diagonal de un cuadrado mide $7\sqrt{2}$ cm, ¿cuánto mide exactamente su lado? ¿Y su área?

b) Si el lado del cuadrado mide $7\sqrt{2}$ cm, ¿cuánto mide exactamente su diagonal? ¿Y su área?

9. De los siguientes números expresados en forma radical, indica cuáles son racionales y cuáles no, y da el valor exacto de los que lo sean:

$$A = \sqrt{2{,}25} \qquad B = \sqrt{0{,}\widehat{1}} \qquad C = \sqrt{0{,}4} \qquad D = \sqrt{2{,}\widehat{7}}$$

SOLUCIONES

1. Teniendo en cuenta que: $6 = 2 \cdot 3$; $10 = 2 \cdot 5$; $15 = 3 \cdot 5$; $24 = 2^3 \cdot 3$; $8 = 2^3$ y $48 = 2^4 \cdot 3$ se tiene:

$$N = \frac{(2 \cdot 3)^{-3} \cdot (2 \cdot 5)^{-4} \cdot (3 \cdot 5)^3}{(2^3 \cdot 3)^7 \cdot (2^3)^{-14} \cdot (2^4 \cdot 3)^3} =$$

$$= \frac{2^{-3} \cdot 3^{-3} \cdot 2^{-4} \cdot 5^{-4} \cdot 3^3 \cdot 5^3}{2^{21} \cdot 3^7 \cdot 2^{-42} \cdot 2^{12} \cdot 3^3} = 2^2 \cdot 3^{-10} \cdot 5^{-1} =$$

$$= \frac{2^2}{3^{10} \cdot 5^1}, \text{ por tanto: } \begin{cases} \text{a) } N = 2^2 \cdot 3^{-10} \cdot 5^{-1} \\ \text{b) } N = \dfrac{2^2}{3^{10} \cdot 5^1} \end{cases}$$

2. $$a = 10 \cdot 10^6 \text{ km} \cdot \frac{10^3 \text{ m}}{1 \text{ km}} \cdot \frac{10^2 \text{ cm}}{1 \text{ m}} = 10^{12} \text{ cm}$$

$$b = 1{,}5 \cdot 10^2 \text{ mg} \cdot \frac{1 \text{ g}}{10^3 \text{ mg}} \cdot \frac{1 \text{ kg}}{10^3 \text{ g}} \cdot \frac{1 \text{ t}}{20^3 \text{ kg}} =$$

$$= 1{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ t}$$

$$c = 35 \text{ dm}^2 \cdot \frac{1 \text{ m}^2}{10^2 \text{ dm}^2} \cdot \frac{1 \text{ km}^2}{10^6 \text{ m}^2} = 3{,}5 \cdot 10^{-7} \text{ km}^2$$

$$d = 250 \text{ l} \cdot \frac{1 \text{ m}^3}{10^3 \text{ l}} \cdot \frac{10^9 \text{ mm}^3}{1 \text{ m}^3} = 2{,}5 \cdot 10^8 \text{ mm}^3$$

3. $$A = \sqrt{2} \cdot 6^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot (2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{1}{2}} \cdot 2^{\frac{1}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}} = 2^{\frac{3}{6}} \cdot 2^{\frac{2}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6}} =$$

$$= 2^{\frac{5}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6}} = \sqrt[6]{2^5 \cdot 3^2}$$

$$B = \frac{\sqrt[3]{12}}{3 \cdot \sqrt{2}} = \frac{(2^2 \cdot 3)^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{\frac{1}{3}}}{3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{4}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6}}}{3^{\frac{6}{6}} \cdot 2^{\frac{3}{6}}} =$$

$$= 2^{\frac{4}{6} - \frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{2}{6} - \frac{6}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{4}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt[6]{2}}{\sqrt[6]{3^4}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{2}{3^4}}$$

$$C = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-2}}{\sqrt{6}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-2}}{(2 \cdot 3)^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{2}{3}} \cdot 3^{-2}}{2^{\frac{1}{2}} \cdot 3^{\frac{1}{2}}} = \frac{2^{\frac{4}{6}} \cdot 3^{-\frac{12}{6}}}{2^{\frac{3}{6}} \cdot 3^{\frac{3}{6}}} =$$

$$= 2^{\frac{4}{6} - \frac{3}{6}} \cdot 3^{-\frac{12}{6} - \frac{3}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{15}{6}} = 2^{\frac{1}{6}} \cdot 3^{-\frac{5}{2}} =$$

$$= \sqrt[6]{\frac{2}{3^{15}}}$$

4. a) $\dfrac{2x + 6}{5} = 2^3 \longrightarrow x = \dfrac{2^3 \cdot 5 - 6}{2} = 17$

b) $(x - 1)^{\frac{1}{4}} = 5^{\frac{1}{2}} = (5^2)^{\frac{1}{4}} \longrightarrow x - 1 = 5^2 \longrightarrow x = 26$

c) $3^{x+1} = \sqrt[3]{3^2} = 3^{\frac{2}{3}} \longrightarrow x + 1 = \dfrac{2}{3} \longrightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

d) $3x = \sqrt[5]{3^3} = 3^{\frac{3}{5}} \longrightarrow x = 3^{\frac{3}{5}} : 3 = 3^{-\frac{2}{5}}$

5. a) $A = \sqrt[3]{3} = \sqrt[6]{3^2} = \sqrt[6]{9}$; $B = \sqrt{2} = \sqrt[6]{2^3} = \sqrt[6]{8}$. El mayor es A.

b) $A = \sqrt[3]{6} = \sqrt[6]{6^2} = \sqrt[6]{36}$; $B = \sqrt{8} = \sqrt[6]{8^3} = \sqrt[6]{512}$. El mayor es B.

c) $A = 8^{\frac{2}{3}} = (2^2)^{\frac{2}{3}} = 2^{\frac{4}{3}} = 2^{\frac{8}{6}}$; $B = 2 \cdot \sqrt[6]{32} = 2 \cdot \sqrt[6]{2^5} = 2 \cdot 2^{\frac{5}{6}} = 2^{\frac{11}{6}}$. El mayor es B.

6. a) $2\sqrt{6} - \sqrt{24} + 3\sqrt{54} = 2\sqrt{6} - \sqrt{4 \cdot 6} + 3\sqrt{9 \cdot 6} = 2\sqrt{6} - 2\sqrt{6} + 9\sqrt{6} = 9\sqrt{6}$

b) $2\sqrt{27} - 3\sqrt{12} + \sqrt{48} = 2\sqrt{9 \cdot 3} - 3\sqrt{4 \cdot 3} + \sqrt{16 \cdot 3} = 6\sqrt{3} - 6\sqrt{3} + 4\sqrt{3} = 4\sqrt{3}$

c) $3\sqrt{80} + 10\sqrt{180} - 2\sqrt{980} =$
$= 3\sqrt{2^4 \cdot 5} + 10\sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} - 2\sqrt{2^2 \cdot 7^2 \cdot 5} =$
$= 12\sqrt{5} + 60\sqrt{5} - 28\sqrt{5} = 44\sqrt{5}$

7. a) $\sqrt{a} \cdot \sqrt[3]{a^2} \cdot \sqrt[4]{a^3} = a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{2}{3}} \cdot a^{\frac{3}{4}} = a^{\frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \frac{3}{4}} = a^{\frac{6+8+9}{12}} = a^{\frac{23}{6}} = \sqrt[6]{a^{23}} = a^3\sqrt[6]{a^5}$

b) $\dfrac{\sqrt[6]{a^5}}{\sqrt[4]{a}} = \dfrac{a^{\frac{5}{6}}}{a^{\frac{1}{4}}} = a^{\frac{5}{6} - \frac{1}{4}} = a^{\frac{10-3}{12}} = a^{\frac{7}{12}} = \sqrt[12]{a^7}$

c) $\dfrac{\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}}{\sqrt[4]{\sqrt{a}}} = \dfrac{(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{1}{2}}}{(a^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{4}}} = \dfrac{a^{\frac{2}{6}}}{a^{\frac{1}{8}}} = \dfrac{a^{\frac{1}{3}}}{a^{\frac{1}{8}}} = a^{\frac{1}{3} - \frac{1}{8}} = a^{\frac{8-3}{24}} = a^{\frac{5}{24}} = \sqrt[24]{a^5}$

8. Llamemos L a la longitud del lado, D a la longitud de la diagonal y S al área del cuadrado. Se tiene:

a) Si $D = 7\sqrt{2}$, $D^2 = L^2 + L^2 = 2L^2 \longrightarrow D = \sqrt{2L^2} = L\sqrt{2} \longrightarrow L = 7$ cm, $S = L^2 = 49$ cm^2

b) Si $L = 7\sqrt{2}$, $D^2 = 2L^2 = 2 \cdot (7\sqrt{2})^2 = 2^2 \cdot 7^2 \longrightarrow D = 14$ cm y $S = (2\sqrt{7})^2 = 4 \cdot 7 = 28$ cm^2

9. $A = \sqrt{2{,}25} = \sqrt{\dfrac{225}{100}} = \sqrt{\dfrac{15^2}{20^2}} = \dfrac{15}{10} = 1{,}5$. Racional

$B = \sqrt{0{,}\widehat{1}} = \sqrt{\dfrac{1}{9}} = \sqrt{\dfrac{1}{3^2}} = \dfrac{1}{3}$. Racional

$C = \sqrt{0{,}4} = \sqrt{\dfrac{4}{10}} = \dfrac{2}{\sqrt{10}}$. Irracional

$D = \sqrt{2{,}\widehat{7}} = \sqrt{\dfrac{27 - 2}{9}} = \sqrt{\dfrac{25}{9}} = \dfrac{5}{3} = 1{,}\widehat{6}$. Racional

2 Potencias y raíces de números reales

1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $2^{x+1} - 3 \cdot 2^{x} + 2^{x-1} = -2$

b) $\begin{cases} 2^{x} + 2^{y} = 6 \\ 2^{x} - 2^{y} = 2 \end{cases}$

2. Sin hacer uso de la calculadora, coloca en orden creciente los siguientes números reales expresados en forma radical razonando tu respuesta:

$$A = \sqrt{5};\ B = \sqrt[3]{10} \text{ y } C = \sqrt[4]{20}$$

Halla, utilizando tu calculadora, los valores aproximados de esos radicales con dos decimales y comprueba la validez de la ordenación realizada.

3. Sabemos que dos números iguales tienen iguales cuadrados. Aplica este criterio y las igualdades notables del álgebra: $(a + b)^2 = a^2 + b^2 + 2ab$ y $(a - b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab$ para probar que las siguientes parejas de números reales son iguales:

a) $A = \sqrt{3{,}2}$ y $B = \sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$

b) $A = \sqrt{5{,}\overline{3}}$ y $B = \sqrt{3} + \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

4. Opera y simplifica las siguientes expresiones radicales y expresa los resultados en forma de radical único y como una potencia de x de exponente fraccionario:

$$A = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \qquad B = \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{x}} \qquad C = \frac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}}$$

5. Opera y simplifica todo lo posible las siguientes expresiones:

$A = (5 - 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3}) - (2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1)$ y $B = \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) - 3(2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1)$

6. Sabiendo que la luz recorre 300 000 kilómetros cada segundo, expresa en notación científica los resultados de las siguientes cuestiones:

a) La distancia en kilómetros a la galaxia Alfa Centauri, distante unos 4 años luz.

b) El número de años que tardaría una nave en llegar a esa galaxia a una velocidad de 50 000 km/h.

7. Se considera la expresión $E(x) = \dfrac{x}{1 + x + x^2}$ y se sustituye x por los radicales $\sqrt{m}$ y $\dfrac{1}{\sqrt{m}}$, siendo m un número natural cualquiera, para obtener los radicales $E(\sqrt{m})$ y $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$. Prueba que son iguales los radicales $E(\sqrt{m})$ y $E\left(\dfrac{1}{\sqrt{m}}\right)$.

8. Extrae factores del radical y simplifica las siguientes expresiones:

$$A = \frac{2\sqrt{27} + 5\sqrt{75}}{4\sqrt{108} - 2\sqrt{48}} \qquad B = \frac{\dfrac{\sqrt{8}}{3} + \dfrac{\sqrt{50}}{4}}{\dfrac{4\sqrt{72}}{3}}$$

9. Como sabes, dos números x e y son inversos respecto de la operación de multiplicar si su producto es igual a la unidad. Considera los números dados mediante los radicales $x = \sqrt{12 + k\sqrt{3}}$ e $y = \sqrt{12 - k\sqrt{3}}$ siendo k un número natural. Multiplícalos y a la vista del resultado averigua:

a) Si existen valores enteros de k para los que el producto de x e y sea entero (utiliza, para ello, el método de ensayo y error).

b) ¿Hay valores enteros de k para los que los números x e y sean inversos multiplicativos?

SOLUCIONES

1. a) Factorizamos $2^{x-1}(2^2 - 3 \cdot 2 + 1) = -2 \longrightarrow$
$\longrightarrow\ -2^{x-1} = -2^1 \longrightarrow\ x - 1 = 1 \longrightarrow\ x = 2$

b) Sumamos ecuaciones $\left\{\begin{array}{l} 2^x + 2^y = 6 \\ 2^x - 2^y = 2 \end{array}\right\} \longrightarrow$
$\longrightarrow\ 2 \cdot 2^x = 8 \longrightarrow\ 2^x = 4 \longrightarrow$
$\longrightarrow\ x = 2 \xrightarrow[4 + 2^y = 6]{2^2 + 2^y = 6} 2^y = 2 \longrightarrow\ y = 1$

2. Reducimos a índice común: mcm (2, 3, 4) = 12. Se tiene:

$A = \sqrt{5} = \sqrt[12]{5^6} = \sqrt[12]{15\,625}$;
$B = \sqrt[3]{10} = \sqrt[12]{10^4} = \sqrt[12]{10\,000}$ y
$C = \sqrt[4]{20} = \sqrt[12]{20^3} = \sqrt[12]{8\,000} \longrightarrow\ C < B < A$
$A = \sqrt{5} \approx 2{,}24$; $B = \sqrt[3]{10} \approx 2{,}15$ y $C = \sqrt[4]{20} \approx 2{,}11$
el orden es, por tanto, $C < B < A$

3. a) $A^2 = 3{,}2$ y $B^2 = \left(\sqrt{5} - \dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 =$

$$= \sqrt{5^2} + \frac{1}{\sqrt{5^2}} - 2 \cdot \sqrt{5} \cdot \frac{1}{\sqrt{5}} = 5 + \frac{1}{5} - 2 =$$

$$= \frac{16}{5} = 3{,}2 = A^2.$$ Son iguales.

b) $A^2 = 5{,}\widehat{3} = \dfrac{53 - 5}{9} = \dfrac{16}{3}$ y

$$B^2 = \left(\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2 =$$

$$= \sqrt{3^2} + \frac{1}{\sqrt{3^2}} + 2 \cdot \sqrt{3} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = 3 + \frac{1}{3} + 2 =$$

$= \dfrac{16}{3}$. Son iguales.

4. $A = \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} = (x(xx^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = x^{\frac{1}{8}} \cdot x^{\frac{1}{4}} \cdot x^{\frac{1}{2}} =$
$= x^{\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{1}{2}} = x^{\frac{1+2+4}{8}} = x^{\frac{7}{8}} = \sqrt[8]{x^7}$

$B = \sqrt[3]{x\sqrt{x}} \cdot \sqrt{x\sqrt{x}} = (xx^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{3}} \cdot (xx^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} =$
$= x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{\frac{1}{6}} \cdot x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{4}} = x^{\frac{1}{3}+\frac{1}{6}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} = x^{\frac{5}{4}} = \sqrt[4]{x^5} = x\sqrt[4]{x}$

$C = \dfrac{\sqrt[3]{x^2} \cdot \sqrt{\sqrt{x}}}{\sqrt{x\sqrt[3]{x}}} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{(xx^{\frac{1}{3}})^{\frac{1}{2}}} = \dfrac{x^{\frac{2}{3}} \cdot x^{\frac{1}{4}}}{x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{\frac{1}{6}}} =$
$= x^{\frac{2}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{2}-\frac{1}{6}} = x^{\frac{1}{4}} = \sqrt[4]{x}$

5. $A = (5 - 2\sqrt{3})(5 + 2\sqrt{3}) - (2\sqrt{2} - 1)(2\sqrt{2} + 1) =$
$= 5^2 - 2^2\sqrt{3^2} - (2^2\sqrt{2^2} - 1^2) =$
$= 25 - 12 - (8 - 1) = 6$
$B = \sqrt{2}(1 - \sqrt{2}) - 3(2 - \sqrt{2}) + (\sqrt{2} + 1)(\sqrt{2} - 1) =$
$= \sqrt{2} - \sqrt{2^2} - 6 + 3\sqrt{2} + \sqrt{2^2} - 1 = 4\sqrt{2} - 7$

6. a) $4 \text{ años} \cdot 365 \dfrac{\text{días}}{\text{año}} \cdot 24 \dfrac{\text{horas}}{\text{día}} \cdot 60 \dfrac{\text{minutos}}{\text{hora}} \cdot$
$\cdot\ 60 \dfrac{\text{segundos}}{\text{minuto}} \cdot 300\,000 \dfrac{\text{km}}{\text{segundo}} \approx$
$\approx 3{,}78 \cdot 10^{13}$ kilómetros

b) $t = \dfrac{3{,}78 \cdot 10^{13}}{5 \cdot 10^4} = 7{,}56 \cdot 10^8 \text{ horas} =$
$= 7{,}56 \cdot 10^8 \text{ horas} \cdot \dfrac{1 \text{ día}}{24 \text{ horas}} \cdot \dfrac{1 \text{ año}}{365 \text{ días}} \approx$
$\approx 8{,}63 \cdot 10^5$, unos 86 300 años.

7. $$E\left(\frac{1}{\sqrt{m}}\right) = \frac{\dfrac{1}{\sqrt{m}}}{1 + \dfrac{1}{\sqrt{m}} + \dfrac{1}{m}} = \frac{1}{\sqrt{m}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{m}} + \dfrac{1}{m}\right)} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{m} + 1 + \dfrac{\sqrt{m}}{m}} = \frac{1}{\sqrt{m} + 1 + \dfrac{1}{\sqrt{m}}} =$$

$$= \frac{1}{\dfrac{m + \sqrt{m} + 1}{\sqrt{m}}} = \frac{\sqrt{m}}{m + \sqrt{m} + 1}$$

Por otra parte, se tiene: $E(\sqrt{m}) = \dfrac{\sqrt{m}}{1 + \sqrt{m} + m}$ y consecuentemente son iguales.

8. $$A = \frac{2\sqrt{27} + 5\sqrt{75}}{4\sqrt{108} - 2\sqrt{48}} = \frac{2\sqrt{3^3} + 5\sqrt{3 \cdot 5^2}}{4\sqrt{2^2 \cdot 3^3} - 2\sqrt{2^4 \cdot 3}} =$$

$$= \frac{2 \cdot 3\sqrt{3} + 5 \cdot 5\sqrt{3}}{4 \cdot 2 \cdot 3\sqrt{3} - 2 \cdot 2^2\sqrt{3}} = \frac{31\sqrt{3}}{16\sqrt{3}} = \frac{31}{16}$$

$$B = \frac{\dfrac{\sqrt{8}}{3} + \dfrac{\sqrt{50}}{4}}{\dfrac{4\sqrt{72}}{3}} = \frac{\dfrac{\sqrt{2^3}}{3} + \dfrac{\sqrt{2 \cdot 5^2}}{4}}{\dfrac{4\sqrt{2^3 \cdot 3^2}}{3}} =$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(\dfrac{2}{3} + \dfrac{5}{4}\right)}{8\sqrt{2}} = \frac{\dfrac{8 + 15}{12}}{8} = \frac{23}{96}$$

9. a) El producto es
$x \cdot y = \sqrt{12 + k\sqrt{3}} \cdot \sqrt{12 - k\sqrt{3}} =$
$= \sqrt{(12 + k\sqrt{3})(12 - k\sqrt{3})} = \sqrt{12^2 - 3k^2} =$
$= \sqrt{144 - 3k^2}$.

Para que el producto sea entero, la expresión $144 - 3k^2$ ha de ser un cuadrado perfecto. Probamos soluciones de la ecuación $144 - 3k^2 = n^2$ para $k = 1, 2, 3, \ldots$ El número adecuado es 6 ya que: $144 - 3 \cdot 6^2 = 36 = 6^2$. No hay más soluciones pues para $k \geqslant 7$ resulta un radicando negativo.

b) Los números x e y no pueden ser inversos ya que si $x \cdot y = 1 \longrightarrow\ 144 - 3k^2 = 1 \longrightarrow$
$\longrightarrow\ k^2 = \dfrac{143}{3}$ no es entero.