2 Números reales

1. Expresa en forma decimal y en forma fraccionaria los siguientes números:

a) 5 décimas b) 3 centésimas c) 12 décimas d) 125 milésimas

2. Utiliza el teorema de Tales para representar en la recta las siguientes fracciones:

$$\frac{3}{7} \qquad \frac{3}{6}$$

3. Clasifica los siguientes números en racionales o irracionales:

$$\sqrt{5}+1 \qquad 3{,}71333\ldots \qquad 1{,}31323334\ldots \qquad -4{,}132 \qquad 6{,}21 \qquad \frac{3}{5}$$

4. Obtén razonadamente la fracción generatriz de:

a) 1,26 b) 2,1515... c) 0,15555...

5. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

a) $\frac{2}{3}$ b) $0{,}6\widehat{5}$ c) 0,656 d) 0,65

6. Realiza las siguientes operaciones, expresando previamente los números decimales en forma fraccionaria:

a) $0{,}01 + \frac{3}{50}$ b) $3 + 1{,}\widehat{4}$ c) $0{,}\widehat{3} - \frac{1}{3}$

7. Dados los números irracionales $\sqrt{5}$, π, di cuál puede representarse gráficamente de forma exacta y cuál de forma aproximada. Sitúalos en la recta graduada.

8. El resultado en la calculadora de la operación $0{,}4 - \frac{1}{3}$ es 0,06666666667. ¿Es cierto? Razona tu respuesta.

9. Una persona mide los lados de una tarjeta de crédito y obtiene 87 mm y 54 mm. Después halla el cociente entre el lado mayor y el lado menor.

Utiliza la calculadora para realizar dicho cociente y di hasta qué cifra decimal coincide con el número áureo $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$.

10. Calcula las siguientes operaciones con tres decimales exactos:

a) $\sqrt{5} + \frac{1}{3}$ b) $\sqrt{3} \cdot 0{,}444\ldots$

11. Se ha aproximado $\frac{6}{11}$ por 0,54. Halla el error absoluto y el error relativo cometido.

SOLUCIONES

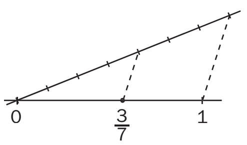
1. a) 5 décimas $= 0{,}5 = \dfrac{5}{10} = \dfrac{1}{2}$

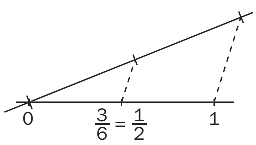
b) 3 centésimas $= 0{,}03 = \dfrac{3}{100}$

c) 12 décimas $= 0{,}12 = \dfrac{12}{100} = \dfrac{3}{25}$

d) 125 milésimas $= 0{,}125 = \dfrac{125}{1\,000} = \dfrac{1}{8}$

2.





3. Racionales: $3{,}71333\ldots$; $-4{,}132$; $6{,}21$; $\dfrac{3}{5}$

Irracionales: $\sqrt{5} + 1$; $1{,}31323334$

4. a) $1{,}26 = \dfrac{126}{100} = \dfrac{63}{50}$

b) $x = 2{,}1515\ldots$
$100x = 215{,}1515\ldots$

Restando las dos igualdades:
$100x - x = 215{,}1515\ldots - 2{,}1515\ldots$

$\Rightarrow 99x = 213 \Rightarrow x = \dfrac{213}{99} = \dfrac{71}{33}$

c) $x = 0{,}1555\ldots$
$10x = 1{,}5555\ldots$ (paso a período puro)
$100x = 15{,}5555\ldots$ (igual período que $10x$)

Restando las dos últimas igualdades:

$100x - 10x = 15{,}5555\ldots - 1{,}5555 \Rightarrow$

$\Rightarrow 90x = 14 \Rightarrow x = \dfrac{14}{90} = \dfrac{7}{45}$

5. Se pasan los números a su expresión decimal:

$\dfrac{2}{3} = 0{,}66666\ldots$; $\quad 0{,}6\widehat{5} = 0{,}65555\ldots$;

$0{,}656 = 0{,}656$; $\quad 0{,}65$

Se comparan sus expresiones decimales y se tiene que:

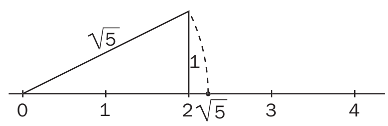
$$0{,}65 < 0{,}6\widehat{5} < 0{,}656 < \frac{2}{3}$$

6. a) $0{,}01 + \dfrac{3}{50} = \dfrac{1}{100} + \dfrac{3}{50} = \dfrac{1}{100} + \dfrac{6}{100} = 0{,}07$

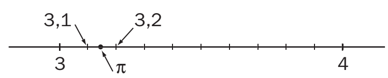
b) $3 + 1{,}\widehat{4} = 3 + \dfrac{14 - 1}{9} = \dfrac{40}{9}$

c) $0{,}\widehat{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} = 0$

7. $\sqrt{5}$ admite representación exacta.



Para representar π se necesita aproximarlo situándolo en intervalos cada vez más pequeños.



8. No.

$$0{,}4 - \frac{1}{3} = \frac{4}{10} - \frac{1}{3} = \frac{12}{30} - \frac{10}{30} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$$

Lo que hace la calculadora es redondear por exceso.

9. $\dfrac{87}{54} = \dfrac{29}{81} = 1{,}6\widehat{1}$

Número áureo $= \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2} = 1{,}61803398\ldots$

Hasta las centésimas.

10. $\sqrt{5} + \dfrac{1}{3} = 2{,}236 + 0{,}666 = 2{,}902$

$\sqrt{3} \cdot 0{,}444\ldots = 1{,}732 + 0{,}444 = 2{,}176$

11. Error absoluto: $\dfrac{6}{11} - \dfrac{54}{100} = \dfrac{3}{550}$

Error relativo: $\dfrac{\frac{3}{550}}{\frac{6}{11}} = \dfrac{1}{100}$

2 Números reales

1. Indica para cada número el menor conjunto numérico al que pertenece:

$\frac{3}{5}$ $\qquad$ $\sqrt{5} - 1$ $\qquad$ $3{,}713333...$

$1{,}313313331...$ $\qquad$ $1 + 0{,}\widehat{2}$ $\qquad$ $\frac{27}{3}$

2. Ordena de menor a mayor los siguientes números:

$1{,}4\widehat{7}$ $\qquad$ $1{,}\widehat{47}$ $\qquad$ $\frac{147}{100}$ $\qquad$ $1{,}476$

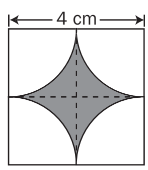
3. Calcula:

a) $2{,}\widehat{7} + 1{,}\widehat{7}$

b) $\sqrt{2{,}\widehat{7}} - \sqrt{1{,}\widehat{7}}$

4. Representa en la recta real $1 + \sqrt{5}$. Aprovechando su construcción obtén, utilizando solo el compás, los números $-1 - \sqrt{5}$ y $1 - \sqrt{5}$.

5. a) Halla el área de la región sombreada en la figura, indicando la solución exacta.



b) Estima el resultado tomando π como 3,14.

6. Un gato situado en la esquina de un patio cuadrado de 10 m de lado ve a un ratón en la esquina opuesta. Halla la longitud del trayecto más corto que debe recorrer para cazarlo. Estima esa longitud con un error menor que 1 cm.

7. Se comete más error al sustituir $\frac{2}{3}$ por 0,6 que al sustituirlo por 0,7. ¿Qué relación hay entre los errores absolutos? ¿Y entre los errores relativos?

8. El número $\sqrt{5}$ es irracional. ¿Puedes justificar por qué $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ también lo es?

9. Un número racional es de la forma $\frac{34a1}{5^2 \cdot 11}$. Hallar el valor del dígito borrado sabiendo que es decimal exacto.

SOLUCIONES

1. $\frac{3}{5}$ es decimal exacto, racional.

$\sqrt{5} - 1$ decimal no periódico, al restar 1 no se altera su parte decimal no periódica, irracional.

$3,71\widehat{3}$ periódico mixto, racional.

1,313313331 tiene infinitos decimales, irracional.

$1 + 0,\widehat{2}$ periódico puro, racional.

$\frac{27}{3} = 9$ entero.

2. La expresión decimal de los números es la siguiente:

a) 1,4777...; b) 1,4747...; c) 1,47; d) 1,476

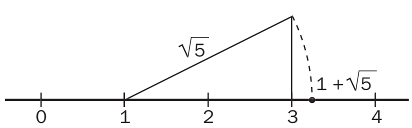
Comparando cifras significativas: $c < b < d < a$

3. $2,\widehat{7} = \frac{27-2}{9} = \frac{25}{9}$ $\quad 1,\widehat{7} = \frac{17-1}{9} = \frac{16}{9}$

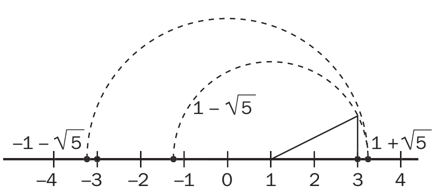
a) $2,\widehat{7} + 1,\widehat{7} = \frac{25}{9} + \frac{16}{9} = \frac{41}{9}$

b) $\sqrt{2,\widehat{7}} - \sqrt{1,\widehat{7}} = \sqrt{\frac{25}{9}} - \sqrt{\frac{16}{9}} = \frac{5}{3} - \frac{4}{3} = \frac{1}{3}$

4. Para representar $1 + \sqrt{5}$ se construye un triángulo rectángulo de la siguiente forma:



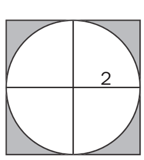
Utilizando el compás se puede representar $-1 - \sqrt{5}$ y $1 - \sqrt{5}$ de la siguiente forma:



5. a) Área cuadrado $= 4^2 = 16$ cm^2

Área círculo $= \pi\, 2^2 = 4\pi$ cm^2

Área región sombreada: $(16 - 4\pi)$ cm^2



b) Estimación pedida: $16 - 4 \cdot 3,14 = 3,44$ cm^2

6. El trayecto más corto es la diagonal del cuadrado.

$d^2 = 10^2 + 10^2 = 200 \Rightarrow d = \sqrt{200} = 10\sqrt{2}$ m $\Rightarrow$

$\Rightarrow d = 14,1421...$

Si se toma d como 14,14, el error cometido es 0,0021..., que es menor que un centímetro.

7. Error absoluto tomando 0,6: $\frac{2}{3} - \frac{6}{10} = \frac{2}{30} = \frac{1}{15}$

Error absoluto tomando 0,7: $\frac{2}{3} - \frac{7}{10} = \frac{1}{30}$

El error cometido por defecto es el doble del cometido por la aproximación por exceso.

Error relativo tomando 0,6: $\dfrac{\frac{1}{15}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{30} = \frac{6}{60}$

Error relativo tomando 0,7: $\dfrac{\frac{1}{30}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{60}$

La relación entre los errores relativos es la misma.

8. Si $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ fuera racional, al multiplicarlo por otro racional, por ejemplo $\frac{3}{2}$, el resultado sería un número racional. Pero $\frac{2}{3}\sqrt{5} \cdot \frac{3}{2} = \sqrt{5}$ es irracional, luego $\frac{2}{3}\sqrt{5}$ es irracional.

9. Si es decimal exacto, en el denominador de su fracción irreducible solamente puede haber potencias de 2 y/o potencias de 5 para poder amplificar a una fracción equivalente con denominador potencia de 10.

En la fracción dada, el denominador es múltiplo de 11, luego el numerador también ha de serlo, para poder eliminar ese factor, se aplica el criterio de divisibilidad de 11 y se tiene que:

$(3 + a) - (4 + 1) = 0 \Rightarrow a = 2$