LOS NÚMEROS

1.Clasificación de los números

Los números se pueden agrupar de la siguiente forma :
Naturales N: 0,1,2,3,4,5,6,.....
Enteros Z: -3,-2,-1,0,1,2,3,4,......(contienen a los naturales)
Racionales o fraccionarios o decimales periódicos Q: 1/3,8/4,5'6,-4'2333...,....(contienen a los enteros)
Irracionales o decimales no periódicos I: $\sqrt{3}$, π,1'24587215963...,.......
Reales R : sería la suma de todos los números racionales e irracionales

2.Opuesto , inverso y valor absoluto de un número

Tomar el valor absoluto de un número consiste en coger el número sin tener en cuenta el signo . Se simboliza con 2 rayas horizontales . Por ejemplo |5|=5 |-5|=5 .
El opuesto de un número es aquel que tiene el mismo valor absoluto pero con distinto signo, esto quiere decir que si sumamos un número y su opuesto , el resultado sería 0 . Por ejemplo , el opuesto del +5 es el -5 y se cumple que 5 + (-5) = 0 .
El inverso de un número es aquel que multiplicado por este nos da 1 . Por ejemplo el inverso de 5 es 1/5 ya que 5·1/5 = 1 .

3.Obtención de la fracción generatriz

Las fracciones nos dan números decimales exactos , periódicos puros (sin anteperiodo) o periódicos mixtos (con anteperiodo).
10/4=2.5 exacto $1/3=0'\overline{3}$ periódico puro $743/90=8'2\overline{5}$ periódico mixto

A partir de una fracción obtenemos un número decimal , pero ¿A partir de un número decimal podemos obtener la fracción de donde proviene?.Puede ocurrir dos casos :
a)Si el número es decimal exacto , se divide el número sin comas , entre un 1 seguido de tantos ceros como cifras tenga la parte decimal

$$87'256=\frac{87256}{1000}$$

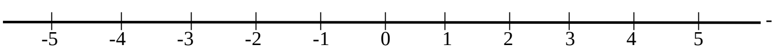
b)Si el número es decimal periódico se pone el número entero sin decimales ni "gorritos" , se le resta la parte no periódica , y se divide por tantos nueves como cifras tenga el periodo y tantos ceros como cifras tenga el anteperiodo (si lo hay).

$$10'\hat{3}=\frac{103-10}{9}=\frac{93}{9}=\frac{31}{3}$$

$$5'23\hat{5}=\frac{5235-523}{900}=\frac{4712}{900}=\frac{1178}{225}$$

4.Ordenación de los números .

La ordenación de los números se hace en una recta que se llama recta real .



Una vez situados los números , será más grande aquel que esté situado más a la derecha , así por ejemplo el -2 es mayor que el -5 .
Una forma de comparar dos números es utilizar los siguientes símbolos :

$>$ mayor que $\quad 6 > -4$

$<$ menor que $\quad -5 < -2$

$\geq$ mayor o igual que $\quad 8 \geq 8$

$\leq$ menor o igual que $\quad -1 \leq 6$

Si lo que se está comparando son fracciones , entonces tenemos dos opciones , o realizamos la división y comparamos los números decimales , o a partir de fracciones equivalentes comparamos las fracciones . Por ejemplo : ¿ Qué es mayor 8/5 o 11/6 ?
8/5 = 1'6 y 11/6 = 1'83 , luego 8/5 < 11/6 .
La otra forma de hacerlo sería multiplicar el numerador y denominador de las dos fracciones por números de tal forma que el denominador sea el mismo: 8/5 = 48/30 y 11/6 = 55/30 luego es mayor 11/6 que 8/5 ya que 55 es más grande que 48 .

5. Criterios de divisibilidad

Dados dos números a y b se dice que a es divisible por b o que a es múltiplo de b si la división a:b es una división exacta (resto nulo).
Los números que solo tienen como divisores a él mismo y la unidad se llaman números primos .
Para obtener los números primos es necesario recordar los siguientes criterios de divisibilidad :
Divisibilidad por 2 : un número es divisible por 2 cuando acaba en 0 o en cifra par .
Divisibilidad por 3 : un número es divisible por 3 cuando la suma de sus cifras es un múltiplo de 3
Divisibilidad por 4 : un número es divisible por 4 cuando sus dos últimas cifras de la derecha son ceros o forman un número divisible por 4 .
Divisibilidad por 5 : un número es divisible por 5 cuando acaba en 0 o en 5 .
Divisibilidad por 6 : un número es divisible por 6 si lo es por 2 y por 3 a la vez .
Divisibilidad por 9 : un número es divisible por 9 cuando lo es la suma de sus cifras .
Divisibilidad por 10 : un número es divisible por 10 si termina en 0 .
Divisibilidad por 11 : un número es divisible por 11 cuando la suma de las cifras de lugar impar menos las de lugar par es 0 o múltiplo de 11 . Por ejemplo 82709 y 4675 son múltiplos de 11.

6.Cálculo del m.c.m. y m.c.d. de dos o más números

Lo primero que hay que hacer es descomponer los números en producto de factores primos .
m.c.m.= es el número más pequeño que se puede dividir por los dos a la vez , y se obtiene a partir de los factores comunes y no comunes al mayor exponente .

m.c.d.= es el mayor número que puede dividir a los dos a la vez , y se obtiene a partir de los factores comunes al menor exponente .

$$\begin{array}{r|l} 75 & 3 \\ 25 & 5 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 60 & 2 \\ 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

m.c.m.=$2^2 \cdot 3 \cdot 5^2$ =300
m.c.d.=$3 \cdot 5$=15

$75=3 \cdot 5^2$ $\qquad 60=2^2 \cdot 3 \cdot 5$

En este caso , 300 sería el menor número (mínimo) que se podría dividir por 75 y por 60 a la vez , ya que 300:75=4 300:60=5 .
Por otro lado , 15 sería el mayor número (máximo) que podría dividir a 75 y 60 , ya que 75:15=5 60:15=4 .
De esta forma se puede calcular intuitivamente el mcm y mcd de cualquier combinación de números , por ejemplo : 25 , 10 , 40 mcm=200 porque es el número más bajo que se puede dividir por los tres y mcd=5 porque es el número más alto que puede dividir a los tres .

OPERACIONES CON NÚMEROS ENTEROS

1.Suma y resta de números enteros

Números del mismo signo se suman y se deja el signo . Números de distinto signo se restan el mayor del menor y se deja el signo del mayor .

+5+6=11   -5-6=-11   -5+6=1   +5-6=-1

En el caso de que tengamos muchos signos seguidos se pueden sumar los positivos por un lado y los negativos por otro y restarlos , dejando el signo del mayor .

5-2+8-4-1+6-2+4+7 =............

2.Producto y división de los números enteros

La regla de los signos nos dice que el producto o división de factores del mismo signo da + , y el de distinto signo da - .

(+5)·(+6)=+30   (-5)·(-6)=+30   (-5)·(+6)=-30   (+5)·(-6)=-30

(+8):(-4)=-2   (-8):(-4)=+2

En el caso de que haya varios productos seguidos se realizan las operaciones como si todos fueran positivos y al final se aplica la regla de los signos :

(+5)·(-2)·(+3)·(-1)·(+2)·(-10)=...........

3.Suma y resta con paréntesis , corchetes y llaves

Hay dos formas de realizar los ejercicios :

a)Quitar todos los paréntesis , después los corchetes y después las llaves , y por último realizar las operaciones .

$$5-\{+4-2+[-5+6-(4-7)]\}=5-\{+4-2+[-5+6-4+7]\}=5-\{+4-2-5+6-4+7\}=$$
$$5-4+2+5-6+4-7=-1$$

b)Realizar las operaciones poco a poco (recomendado) .

$$5-\{+4-2+[-5+6-(4-7)]\}=5-\{+4-2+[-5+6+3]\}=5-\{+4-2+4\}=5-6=-1$$

4.Suma , resta , multiplicación y división de números enteros

Si no hay paréntesis el orden de prioridad es :

1ºPotencias
2ºProductos y cocientes
3ºSumas y restas

5 + 3·2=11   5·3 + 2=17 8^2:4 + 5=64:4 + 5=16+5=21

5. Suma , resta , multiplicación y división con paréntesis , corchetes y llaves

Se recomienda ir haciendo las operaciones sencillas a parte , y siempre teniendo en cuenta que primero se realizan los productos y divisiones , y luego las sumas y los productos .

$$\left[8 \bullet 5 + 4 - (3 + 5 - 2 \bullet 3)\right] : \left\{-4 \bullet (6 - 8) - 10\right\} =$$

OPERACIONES CON NÚMEROS RACIONALES

1.Fracciones equivalentes

Dos fracciones son equivalentes si las dividimos con la calculadora y obtenemos el mismo número , por ejemplo 8/4 y 10/5.

Otra forma de definirlas sería : dos fracciones son equivalentes cuando al multiplicarlas en cruz obtenemos el mismo número .

En algunos casos basta con ver que numeradores y denominadores son proporcionales , ya que " si en una fracción multiplicamos o dividimos arriba y abajo por el mismo número , obtenemos una fracción equivalente ".

$\frac{2}{3}$ y $\frac{8}{12}$ son fracciones equivalentes pues 2·12=24 y 3·8=24 o también porque

$$\frac{2 \bullet 4}{3 \bullet 4} = \frac{8}{12}$$

Esta propiedad de las fracciones se suele utilizar mucho para simplificar fracciones , dividiendo numerador y denominador por un divisor común (como máximo por su mcd) , hasta obtener lo que se llama una fracción irreducible es decir , que no se puede simplificar más .

En algunos casos se confunde esta propiedad y se realizan mal las operaciones :

$$\frac{15}{21} = \frac{3 \bullet 5}{3 \bullet 7} = \frac{5}{7} \qquad \frac{15}{21} = \frac{10+5}{10+11} \neq \frac{5}{11}$$

Por lo tanto : "solo se puede simplificar en una fracción cuando tengamos productos".

En algunos casos se puede simplificar en una suma sacando factor común y convirtiendo la suma en un producto :

$$\frac{24+15}{9} = \frac{3 \bullet (8+5)}{3 \bullet 3} = \frac{13}{3}$$

2.Suma de dos fracciones

Pueden ocurrir dos casos :

1º Que tengan el mismo denominador . Se debe de sumar los numeradores y el denominador se deja igual .

$$\frac{3}{5} + \frac{9}{5} = \frac{12}{5}$$

2º Que no tengan el mismo denominador . Debemos de intentar encontrar fracciones equivalentes que tengan el mismo denominador . Se pueden utilizar los siguientes métodos :

a) Utilizando fracciones equivalentes

$$\frac{3}{5} + \frac{7}{10} = \frac{6}{10} + \frac{7}{10} = \frac{13}{10}$$

este método solo es indicado cuando se tengan que realizar operaciones sencillas .

b) multiplicando en cruz

$$\frac{15}{60}+\frac{8}{12}=\frac{180+480}{720}=\frac{660}{720}=\frac{66}{72}=\frac{33}{36}=\frac{11}{12}$$

este método es el más sencillo , pero nos da valores muy altos que luego tenemos que simplificar . Se suele usar cuando los números son pequeños .

c) utilizando el m.c.m.

$$\frac{15}{60}+\frac{8}{12}=\frac{15}{60}+\frac{40}{60}=\frac{55}{60}=\frac{11}{12}$$

lo bueno de este método es que hay que simplificar mucho menos al final .

3.Suma de una fracción más un número entero :

Se le pone un 1 debajo y se suman las fracciones .

$$\frac{3}{4}+5=\frac{3}{4}+\frac{5}{1}=\frac{3+20}{4}=\frac{23}{4}$$

4.Suma de más de dos fracciones

a) Utilizando fracciones equivalentes :

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{7}{20}=\frac{8}{20}+\frac{6}{20}+\frac{7}{20}=\frac{21}{20}$$

b) Para multiplicar en cruz hay que tener cuidado de multiplicar los numeradores por todos los denominadores menos por el suyo .

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{3}=\frac{60}{150}+\frac{45}{150}+\frac{200}{150}=\frac{305}{150}=\frac{61}{30}$$

c) El m.c.m. es igual que con dos fracciones .

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}+\frac{4}{15}=\frac{12}{30}+\frac{9}{30}+\frac{8}{30}=\frac{29}{30}$$

5.Resta de fracciones

Se hace igual que en la suma teniendo mucho cuidado con los signos .

$$\frac{2}{5}+\frac{3}{10}-\frac{4}{3}=\frac{60}{150}+\frac{45}{150}-\frac{200}{150}=\frac{-95}{150}=\frac{-19}{30}$$

No olvidemos que una fracción negativa se le puede poner el signo en el centro , en el numerador o en el denominador .

$$-\frac{2}{5}=\frac{-2}{5}=\frac{2}{-5}$$

6.Paréntesis , corchetes y llaves

Hay dos formas de realizar las operaciones :

a) Quitar primero los paréntesis , luego los corchetes y después las llaves , y al final hacer las operaciones . No es muy recomendable .

$$\frac{2}{5}-\left\{\frac{1}{3}-\frac{4}{6}+\left(-\frac{5}{3}+6\right)\right\}=\frac{2}{5}-\left\{\frac{1}{3}-\frac{4}{6}-\frac{5}{3}+6\right\}=\frac{2}{5}-\frac{1}{3}+\frac{4}{6}+\frac{5}{3}-6=\frac{12-10+20+50-180}{30}=$$

$$\frac{-108}{30}=\frac{-18}{5}$$

b) Hacer las operaciones paso a paso .

$$\frac{2}{5}-\left\{\frac{1}{3}-\frac{4}{6}+\left(-\frac{5}{3}+6\right)\right\}=\frac{2}{5}-\left\{\frac{1}{3}-\frac{4}{6}+\frac{13}{3}\right\}=\frac{2}{5}-\left\{\frac{2-4+26}{6}\right\}=\frac{2}{5}-\{4\}=\frac{2-20}{5}=\frac{-18}{5}$$

7.Producto de fracciones

Se multiplica numerador por numerador y denominador por denominador

$$\frac{2}{3}\bullet\frac{5}{4}=\frac{10}{12}=\frac{5}{6}$$

$$2\bullet\frac{5}{4}=\frac{2}{1}\bullet\frac{5}{4}=\frac{10}{4}=\frac{5}{2}$$

$$\frac{4}{3}\bullet\frac{5}{4}\bullet 6=\frac{120}{12}=10$$

8.División de fracciones

Se multiplican en cruz .

$$\frac{2}{5}:\frac{6}{7}=\frac{14}{30}=\frac{7}{15}$$

$$4:\frac{8}{3}=\frac{4}{1}:\frac{8}{3}=\frac{12}{8}=\frac{3}{2}$$

En el caso de que haya más de una división seguida debe de indicarse con paréntesis cual se hace primero . Lo mismo ocurriría si hubiese un producto y una división seguidas .

9.Suma , resta , multiplicación y división de fracciones

En el caso de que tengamos varias operaciones a la vez , se realizarán en primer lugar los productos y divisiones .

$$\frac{1}{5}-\frac{2}{3}\bullet\frac{6}{5}+8=\frac{1}{5}-\frac{12}{15}+8=\frac{3-12+120}{15}=\frac{111}{15}=\frac{37}{5}$$

10.Paréntesis , corchetes y llaves

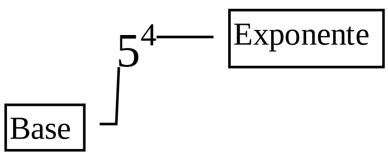
Es combinar todo lo visto hasta ahora , aunque se recomienda ir haciendo las operaciones poco a poco , siempre teniendo en cuenta que se realizan en primer lugar los productos y divisiones , y después las sumas y las restas .

$$\frac{2}{5}\bullet\left\{\frac{-2}{3}+\frac{1}{6}-\left[\frac{4}{3}:\left(\frac{8}{9}+2\right)-\frac{1}{3}\right]+\frac{5}{12}\right\}=\ldots\ldots$$

OPERACIONES CON POTENCIAS

1.Definición de potencia de exponente entero

Una potencia es un símbolo que expresa una multiplicación en la que todos los factores son iguales : $5^4=5\cdot5\cdot5\cdot5=625$



Pueden ocurrir dos casos :

a)La base es un número entero

$5^3=5·5·5=125$

$5^1=5$

$5^0=1$ pues cualquier número elevado a cero es 1 .

$(-5)^2=(-5)·(-5)=+25$ o dicho de otra forma , si la base de una potencia es un número negativo y su exponente es par entonces el resultado es positivo .

$(-5)^3=(-5)·(-5)·(-5)=-125$ o dicho de otra forma , si la base de una potencia es un número negativo y su exponente es impar entonces el resultado es negativo .

Pero ....¿Qué ocurre si el exponente también es negativo ?........pues que obtenemos el número inverso (no confundir con el opuesto , el opuesto del 6 es el -6 y el inverso es 1/6)

$$5^{-3}=\frac{1}{5^3}=\frac{1}{125}$$

$$(-2)^{-4}=\frac{1}{(-2)^4}=\frac{1}{16}$$

Nota : mucho cuidado con las siguientes notaciones que parecen iguales :

$(-5)^2=25$ $-5^2=-25$ $(-5)^3=-125$ $-5^3=-125$

si no se pone paréntesis , el signo no entra dentro del exponente .

b)La base es un número fraccionario

Cuando una fracción aparece elevada a un exponente positivo se eleva numerador y denominador :

$$\left(\frac{3}{5}\right)^2=\frac{9}{25}$$

Pero si el exponente es negativo primero calculamos el inverso del número y después se elevan numerador y denominador al exponente que se ha convertido en positivo .

Puesto que el inverso de $6=\frac{6}{1}$ es $\frac{1}{6}$ esto quiere decir que el inverso de $\frac{3}{5}$ es $\frac{5}{3}$, y por lo tanto :

$$\left(\frac{4}{3}\right)^{-2}=\left(\frac{3}{4}\right)^2=\frac{9}{16}$$

2.Propiedades de las potencias

1ª El producto de dos potencias de la misma base es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente la suma de los exponentes .

$5^3·5^4=5^7$

2ª El cociente de dos potencias de la misma base es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente la diferencia de los exponentes .

$$\frac{2^8}{2^5}=2^3$$

3ª La potencia de una potencia es otra potencia que tiene por base la misma y por exponente el producto de los exponentes .

$(2^3)^4=2^{12}$

4ª El producto de dos potencias con el mismo exponente es otra potencia que tiene por base el producto de las bases y por exponente el mismo .

$3^2·5^2=15^2$

5ª El <u>cociente de dos potencias con el mismo exponente</u> es otra potencia que tiene por base el cociente de las bases y por exponente el mismo .

$$\frac{10^3}{5^3} = 2^3$$

Todas estas propiedades valen para las fracciones .

Nota : no hay propiedades para la suma de potencias , ni tampoco para potencias que no tengan nada en común , como por ejemplo : $2^3+2^2\neq 2^5$ ya que $8+4\neq 32$ y $2^3\cdot 5^2\neq 10^5$ ya que $8\cdot 25\neq 100000$

Nota : Cuando en una fracción aparecen potencias se pueden subir al numerador o bajar al denominador sin más que cambiar el signo al exponente :

$$\frac{3^4}{3^{-2}} = 3^4 \bullet 3^2 = 3^6 \qquad \frac{5^{-2} \bullet 5^4}{5^1 \bullet 5^{-3}} = \frac{5^3 \bullet 5^4}{5^1 \bullet 5^2} = \frac{5^7}{5^3} = 5^4$$

3.Lenguaje científico : potencias de 10 y redondeo .

Puesto que en la ciencia se habla de cantidades muy grandes o muy pequeñas (distancia de la Tierra a la Luna , número de partículas en un litro de sustancia , volumen de un átomo ....) , se utilizan las potencias de 10 para simplificar los cálculos .

10
$10^2=100$
$10^3=100$
.....
$10^7=10000000$
$5\cdot 10^2=5\cdot 100=500$
$8\cdot 10^5=800000$
$7'5\cdot 10^3=7'5\cdot 1000=750$
$6'25\cdot 10^4=6'25\cdot 10000=62500$

10
$10^{-1}=1/10=0'1$
$10^{-2}=1/100=0'01$
$10^{-3}=1/1000=0'001$
....
$10^{-6}=0'000001$
$5\cdot 10^{-1}=5\cdot 1/10=5/10=0'5$
$=5\cdot 0'1=0'5$
$6'4\cdot 10^{-3}=6'4/1000=0'0064$
$=6'4\cdot 0'001=0'0064$
$0'0052\cdot 10^{-2}=0'0052/100=0'000052$
$=0'0052\cdot 0'01=0'000052$

Por lo tanto cuando un número se multiplica por una potencia de 10 de exponente positivo se mueve la coma hacia la derecha tantos lugares como indique el exponente . Si por el contrario el exponente de la potencia de 10 es negativo , se mueve la coma hacia la izquierda .

Otra cosa que también utilizan los científicos es el redondeo de números . Redondear un número es obtener otro número aproximado al primero , mucho más fácil de manejar , y consiste simplemente en despreciar las cifras que no interesen . Si por ejemplo la distancia de Plutón al Sol es de 5.913.498.763.856 km se puede redondear a 6.000.000.000.000 km y utilizando la notación científica $6\cdot 10^{12}$km.

Redondear un número hasta n cifras es sustituir por ceros todas las cifras siguientes a la de orden n . La cifra de orden n se deja como está si la que sigue es menor que 5 , y se aumenta en una unidad si la que sigue es mayor o igual que 5 . Por ejemplo :

Redondear el número 3'684684..... hasta :

a)las décimas : 3'7

b)las centésimas : 3'68

c)las milésimas : 3'685

d)el entero más próximo : 4

El <u>error</u> de una aproximación es la diferencia entre el valor exacto y el valor aproximado.

SISTEMAS DE MEDIDA

1.Sistemas de medida

Los sistemas de medida se basan fundamentalmente en las potencias de 10 y utilizan casi siempre los mismos prefijos .

mili=10^{-3}=1/1000=0'001
centi=10^{-2}=1/100=0'01
deci=10^{-1}=1/10=0'1
......
Deca=10
hecto=10^{2}=100
kilo=10^{3}=1000
Miria=10^{4}=10000

2.Medida de longitud

La unidad fundamental de longitud es el metro . Por lo tanto tendremos :

mm=0'001m=10^{-3}m $\Rightarrow$ 1m=1000mm
cm=0'01m=10^{-2}m $\Rightarrow$ 1m=100cm
dm=0'1m=10^{-1}m $\Rightarrow$ 1m=10cm
m
Dm=10m=10^{1}m (también se puede escribir dam)
Hm=100m=10^{2}m
Km=1000m=10^{3}m
Mm=10000m=10^{4}m

3.Medida de masa

La unidad fundamental de masa es el gramo . Por lo tanto tendremos :

mgr=0'001gr=10^{-3}gr $\Rightarrow$ 1gr=1000mgr
cgr=0'01gr=10^{-2}gr $\Rightarrow$ 1gr=100cgr
dgr=0'1gr=10^{-1}gr $\Rightarrow$ 1gr=10gr
gr
Dgr=10gr=10^{1}gr
Hgr=100gr=10^{2}gr
Kgr=1000gr=10^{3}gr
Mgr=10000gr=10^{4}gr
Qm=100000gr=10^{5}gr (quintal métrico)
Tm=1000000gr=10^{6}gr (tonelada métrica)

4.Medida de tiempo

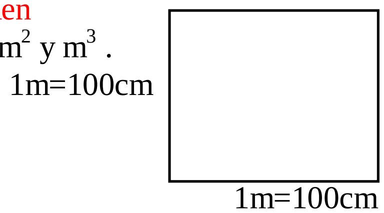
La unidad fundamental de tiempo es el segundo .

msg=0'001sg=10^{-3}sg (milésima de sg) $\Rightarrow$ 1sg=1000msg
csg=0'01sg=10^{-2}sg (centésima de sg) $\Rightarrow$ 1sg=100csg
dsg=0'1sg=10^{-1}sg (décima de sg) $\Rightarrow$ 1sg=10dsg
sg
minuto=60sg
Hora=3600sg
Día=86400sg

Año=31536000sg

5.Medida de superficie y volumen

La unidad fundamental son los m^2 y m^3 .



Área del cuadrado = lado*lado $=1m\cdot1m=1m^2$

$=10dm\cdot10dm=100dm^2$

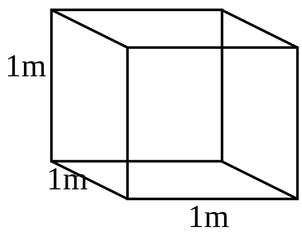
$=100cm\cdot100cm=10000cm^2$

$=1000mm\cdot1000mm=1000000mm^2$

$= 0'1Dm\cdot0'1Dm = 0'01Dm^2$

$= 0'01Hm\cdot0'01Hm= 0'0001Hm^2$

$= 0'001Km\cdot0'001Km=0'000001Km^2$



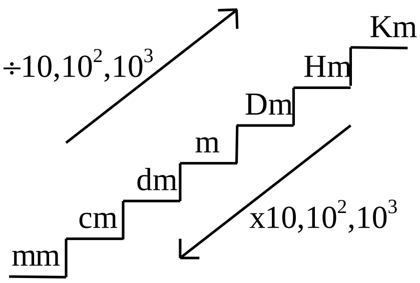
Volumen del cuadrado : lado*lado*lado $=1m\cdot1m\cdot1m=1m^3$

$=10dm\cdot10dm\cdot10dm=1000dm^3$

$=100cm\cdot100cm\cdot100cm=10^6cm^3$

$=1000mm\cdot1000mm\cdot1000mm=10^9mm^3$

Escalera de conversión :



Recordar que por ejemplo multiplicar por 100 es añadir dos ceros o mover la coma dos lugares a la derecha , y dividir por cien es mover la coma dos lugares hacia la izquierda .

6.Medida de capacidad

La unidad fundamental de capacidad (cantidad de gas o líquido que cabe dentro de un recipiente) es el litro , es decir , cuando hablamos de líquidos y gases , la unidad fundamental no son los metros cúbicos , si no que son los litros .

$ml=0'001l=10^{-3}l(\Leftrightarrow1cm^3)\Rightarrow 1l=1000ml$

$cl=0'01l=10^{-2}l \Rightarrow 1l=100cl$

$dl=0'1l=10^{-1}l \Rightarrow 1l=10dl$

$l(\Leftrightarrow1dm^3)$

$Dl=10l=10^1l$
$Hl=100l=10^2l$
$Kl=1000l=10^3l(\Leftrightarrow 1m^3)$
$Ml=10000l=10^4l$
Por lo tanto recordar que :
$1Kl=1m^3$ es decir , un metro cúbico de agua 1m·1m·1m contiene 1000 litros de agua
$1l=1dm^3$ es decir , un litro de agua ocupa un cubo de 10cm·10cm·10cm
$1ml=1cm^3$ es decir , un mililitro de agua ocupa un dado de 1cm·1cm·1cm

OPERACIONES CON NÚMEROS IRRACIONALES

1.La raíz cuadrada , cúbica y de índice cualquiera .

La raíz cuadrada de un número a es otro número b que elevado al cuadrado nos da el primero . Consecuencias :
a) Todo número positivo tiene dos raíces cuadradas .
b) Los números negativos no tienen raíz cuadrada .
c) La obtención de la raíz cuadrada es la inversa de elevar al cuadrado . Así :

$$\sqrt{7^2} = 7 \qquad \left(\sqrt{3}\right)^2 = 3$$

La raíz cúbica de un número a es otro número b que elevado al cubo nos da el primero . Consecuencias :
a) Todo número positivo tiene una única raíz cúbica .
b) Los números negativos si tienen raíz cúbica
c) La obtención de la raíz cúbica es la inversa de elevar al cubo . Así :

$$\sqrt[3]{7^3} = 7 \qquad \left(\sqrt[3]{4}\right)^3 = 4$$

La raíz n-ésima de un número a es otro número b que elevado a n nos da el primero .

$$\boxed{\text{índice}} \longrightarrow \sqrt[n]{a} = b$$

$\boxed{\text{radicando}}$

2. Suma y resta de raíces

Solo se pueden sumar y restar raíces del mismo índice y mismo radicando :

$$\sqrt{16} + \sqrt{16} = 2\sqrt{16}$$

Como se puede comprobar , la raíz de una suma o resta no es la suma de raíces :

$$\sqrt{16+9} \neq \sqrt{16} + \sqrt{9}$$

3. Producto y división de raíces

Solo se pueden multiplicar y dividir raíces del mismo índice :

$$\sqrt[3]{8} \bullet \sqrt[3]{27} = \sqrt[3]{216} \qquad \sqrt{64}:\sqrt{4} = \sqrt{16}$$

También se puede decir al revés , es decir , la raíz de un producto es el producto de raíces (lo mismo para el cociente):

$$\sqrt{16 \bullet 4} = \sqrt{16} \bullet \sqrt{4} \qquad \sqrt{\frac{16}{25}} = \frac{4}{5}$$

Por otro lado veamos el siguiente ejemplo :

$$\left(\sqrt{14}\right)^2 = \sqrt{14} \cdot \sqrt{14} = \sqrt{(14)^2} = 14$$

Del este ejemplo se puede obtener que el exponente de una potencia y el índice de una raíz se pueden simplificar si son iguales y también que el exponente de una raíz se puede pasar dentro de ella .

4. Propiedad fundamental de las raíces

Si se multiplican o dividen el índice de una raíz y el exponente del radicando por el mismo número , el valor de la raíz no varía .
Esta propiedad nos permite multiplicar y dividir raíces de distinto índice .

5. Raíz de una raíz

Para calcular la raíz de una raíz , se multiplican los índices

6. Potencia de una raíz

La potencia de una raíz es la raíz de la potencia .

7. Otras operaciones con raíces

En algunas ocasiones se puede simplificar las raíces convirtiendo el radicando en producto de potencias :

$$\sqrt{108} = \sqrt{2^7} = \sqrt{2^2 \cdot 2^2 \cdot 2^2 \cdot 2} = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \sqrt{2} = 8\sqrt{2}$$

$$\sqrt{180} = \sqrt{2^2 \cdot 3^2 \cdot 5} = 6\sqrt{5}$$

$$\sqrt[3]{576} = \sqrt[3]{2^6 \cdot 3^2} = 4\sqrt[3]{9}$$

En otras ocasiones lo que se intenta es introducir números dentro de una raíz , para lo cual debemos de elevarlos al índice de la raíz :

$3\sqrt{5} = \sqrt{45}$ $\qquad$ $2\sqrt[3]{10} = \sqrt[3]{80}$

8.Racionalizar

Consiste en quitar las raíces que puedan aparecer en el denominador . Puede ocurrir dos casos :

1º Que el denominador sea una raíz cuadrada : en este caso se multiplica numerador y denominador por la misma raíz .

$$\frac{5}{\sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \frac{5\sqrt{2}}{2}$$

2º Que el denominador no sea una raíz cuadrada : en este caso se multiplica numerador y denominador por una raíz del mismo índice que el denominador , pero con un radicando elevado a un exponente que haga desaparecer la raíz del denominador .

$$\frac{5}{\sqrt[3]{2}} = \frac{5\sqrt[3]{2^2}}{\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2^2}} = \frac{5\sqrt[3]{4}}{2}$$

3º Que el denominador sea un binomio con raíces cuadradas : en este caso debemos de multiplicar numerador y denominador por el conjugado .

$$\frac{2}{5-\sqrt{3}} = \frac{2 \cdot (5+\sqrt{3})}{(5-\sqrt{3}) \cdot (5+\sqrt{3})} = \frac{10+2\sqrt{3}}{25-3} = \frac{10+2\sqrt{3}}{22}$$

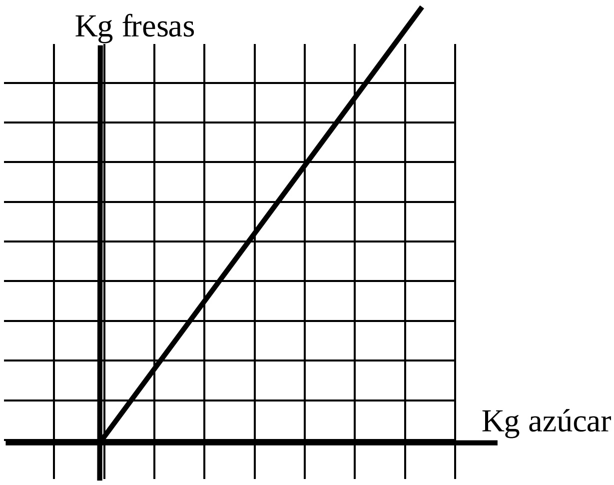
PROPORCIONALIDAD NUMÉRICA

Magnitudes directamente proporcionales

Son dos magnitudes relacionadas de tal forma que al multiplicar una de ellas por un valor , la otra también queda multiplicada por el mismo , es decir , si aumenta o disminuye una magnitud , la otra también . El cociente entre dos magnitudes directamente proporcionales es constante , y se llama **constante de proporcionalidad** .
Ejemplo :
Para hacer mermelada de fresa se necesita cierta cantidad de azúcar por cada kilo de fresa , es decir cuanta más mermelada queramos tener más fresas y por lo tanto más azúcar debemos de echar . En la siguiente tabla se muestran algunas de estas cantidades :

	Cantidad (kg)				
Fresas	4	12	20	?	35
Azúcar	2	6	?	14	?

En este ejemplo las dos magnitudes son directamente proporcionales porque al aumentar una , aumenta la otra en la misma proporción .
La constante de proporcionalidad es $4/2=12/6=20/10=28/14=35/17'5=2$
Observa también que eligiendo dos fracciones cualesquiera el producto de extremos es igual al producto de medios : $4\cdot 6 = 2\cdot 12$
Esta ultima propiedad nos va a servir para hacer lo que se llama las **reglas de tres directa** , así por ejemplo cogiendo la segunda y tercera fracción :
$12\cdot ? = 6\cdot 20 \Rightarrow ? = 120/12=10$
Se suele expresar estos cálculos de esta otra forma
12 ----------------20
6 ---------------- x $\qquad$ $x = (6 \cdot 20)/12 = 10$
O también :
12 ---------------- 6
20 ---------------- x $\qquad$ $x = (20\cdot 6)/12 = 10$
Si representamos gráficamente dos magnitudes directamente proporcionales obtendremos una **recta** .



En la recta podemos observar como por cada unidad que aumenta al azúcar , aumenta 2 unidades la cantidad de fresas (recordemos que 2 es la constante de proporcionalidad) .

Porcentajes

Los porcentajes o tantos por ciento expresan la razón entre dos magnitudes directamente proporcionales e indican la cantidad o valor de una de ellas que corresponde a 100 de la otra , por ejemplo si nos dicen que el 70% de los alumnos del instituto está vacunado contra la hepatitis , quiere decir que por cada 100 alumnos , 70 están vacunados , y que por lo tanto si el instituto tiene 200 alumnos , habrá 140 vacunados .
El cálculo del tanto por ciento de una cantidad es un caso particular de regla de tres en el cual uno de los valores conocidos es siempre 100 . Así , para hallar el 70% de 200 alumnos haríamos :

100%--------------200
70% -------------- x $x = (200 \cdot 70)/100 = 140$

O también :

100 -------------- 70
200 -------------- x $x = (200 \cdot 70)/100 = 140$

Interés simple

Si depositamos en una cuenta bancaria una cantidad de dinero , que se llama **capital** , al cabo de un tiempo tendremos el capital que habíamos depositado más otra cantidad de dinero que el banco nos abona y que se llama **interés** .
El interés que producen 100 pts depositadas en una cuenta bancaria <u>durante un año</u> se llama **rédito o tanto por ciento** .
Ejemplo :
Metemos una cierta cantidad de dinero con un rédito del 4%

Capital (pts)	100	200	300	1.000	300.000	?
Interéses(pts)	4	8	12	40	?	6.000

En esta tabla se observa que fijado el rédito (4%) y el tiempo (1 año) , los interéses son directamente proporcionales a los capitales (a doble capital , doble interés , a triple capital , triple interés , etc)

100   ------------- 4
300.000 ------------- x $x = (300.000 \cdot 4)/100 = 12000$ pts (en un año)

Los bancos también nos pueden prestar dinero , entonces somos nosotros los que al cabo de un tiempo fijado , debemos devolver al banco todo el capital que nos presto , más un interés que será lo que gana el banco con esa operación .
Ejemplo :
Si el banco nos ha prestado 1.000.000 pts a un 8% por cada año y debemos devolverlo en 5 años ¿ cuánto dinero pagaremos al banco ?

100   ----------- 8
1.000.000 ----------- x $x = (1.000.000 \cdot 8)/100 = 80.000$ pts al año , luego en 5 años debemos de pagar de interéses $80.000 \cdot 5 = 400.000$ pts .

En total hay que pagar al banco 1.000.000 + 400.000 = 1.400.000 pts en 5 años .
Si queremos pagar este dinero mensualmente entonces $12 \cdot 5 = 60$ meses $\Rightarrow$ 1.400.000/60 = 23.333'3 pts .

En la realidad esto no se hace así ya que se utiliza lo que se llama interés compuesto , que es mucho más complicado pues se tiene en cuenta los interéses de los interéses .

Magnitudes inversamente proporcionales

Son dos magnitudes relacionadas de tal forma que al multiplicar una de ellas por un valor , la otra queda dividida por el mismo valor . En este caso el producto de cada par de valores correspondientes a dos magnitudes inversamente proporcionales es constante , y se llama **constante de proporcionalidad inversa** .

Ejemplo :

Para organizar una fiesta de cumpleaños un grupo de amigos alquila un local por un precio fijo . En un principio son 12 amigos y les toca pagar 500 pts a cada uno , eso quiere decir que el local cuesta 12·500 = 6000 pts el local . Si en lugar de ir 12 amigos , fuesen muchos más , les tocaría pagar menos a cada uno .Veamos la tabla que relaciona el número de amigos con lo que les toca pagar :

Nº amigos	?	6	12	24	48
Dinero por persona	2000	?	500	250	?

En este caso siempre el producto del número de amigos , por lo que paga cada uno debe ser de 6000 pts , luego 12·500=24·250=6000 (constante de proporcionalidad inversa)

Por tanto si queremos calcular cuanto pagarían 6 amigos :

$6 \cdot ? = 12 \cdot 500 \Rightarrow ? = 6000/6 = 1000$ pts

Esta ultima propiedad nos va a servir para hacer lo que se llama una **regla de tres inversa** , se suelen expresar los cálculos de la siguiente forma .

12 ------------ 500

6 ------------ x $x = (12 \cdot 500)/6 = 1000$

Si representamos gráficamente dos magnitudes inversamente proporcionales obtendremos una **hipérbola** :