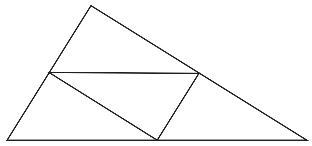
6 Figuras semejantes. Teorema de Tales

1. La base y la altura de un rectángulo miden, respectivamente, 12 y 8 cm. Sabemos que otro rectángulo semejante al dado tiene un área de 54 cm^2. ¿Cuánto miden los lados del segundo rectángulo?

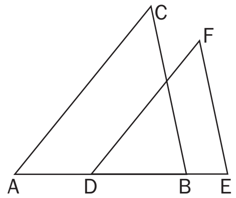
2. Si incrementamos un 20% la longitud de cada uno de los lados de un triángulo cualquiera obtenemos un nuevo triángulo. Averigua si ambos triángulos son semejantes y halla, en su caso, la razón de semejanza.

3. En un triángulo cualquiera unimos los puntos medios de los lados, formándose cuatro triángulos. Demuestra que los cuatro son iguales y, a su vez, semejantes al triángulo inicial. Halla la razón de semejanza.

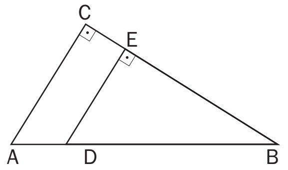


4. Determina, utilizando los criterios de semejanza, en qué casos son semejantes los siguientes triángulos:

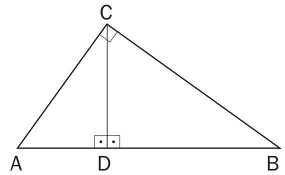
a) *ABC* y *DEF*



b) *ABC* y *DBE*



c) *ABC* y *ACD*



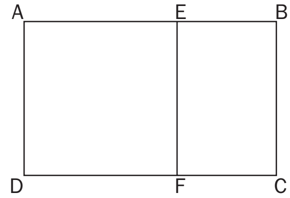
5. Las bases de un trapecio isósceles miden 20 y 30 cm, respectivamente, y los lados iguales, 6 cm. Si prolongamos dichos lados hasta que se corten obtenemos un triángulo.

a) ¿Qué tipo de triángulo es?

b) ¿Cuánto miden los lados de este triángulo?

6. Calcula las dimensiones de un rectángulo cuya diagonal mide 10 cm, sabiendo que es semejante a otro rectángulo cuya base mide 4 cm y su altura 3 cm.

7. Consideramos un rectángulo. Trazando un segmento paralelo al lado menor, lo dividimos en un cuadrado y otro rectángulo como muestra la figura.



¿En qué condiciones los rectángulos *ABCD* y *EBCF* son semejantes?
Halla, en su caso, la razón de semejanza. ¿Sabes cómo se llama este resultado?

8. Divide gráficamente un segmento $\overline{AB}$ de 60 mm de longitud en dos partes que sean proporcionales a dos segmentos de longitudes 3 y 7 cm, respectivamente.

9. Dados tres segmentos de longitudes a, b y c, respectivamente, se llama cuarto proporcional a los tres a un segmento de longitud x que verifica la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$. Halla gráficamente el segmento cuarto proporcional a los segmentos de longitud $a = 2$ cm, $b = 2{,}5$ cm y $c = 3$ cm.

10. Dados dos segmentos de longitudes a y b, respectivamente, se llama tercero proporcional a los dados a un segmento de longitud x que verifica la proporción $\frac{a}{b} = \frac{b}{x}$. Explica cómo se halla gráficamente el segmento tercero proporcional a los segmentos de longitud $a = 10$ mm y $b = 16$ mm.

SOLUCIONES

1. $\begin{cases} \dfrac{12}{x} = \dfrac{8}{y} \\ xy = 54 \end{cases} \Rightarrow y = \dfrac{2x}{3} \Rightarrow \dfrac{2x^2}{3} = 54 \Rightarrow$

$\Rightarrow x^2 = 81 \Rightarrow x = 9$ m, $y = 6$ cm

2. Si los lados del primer triángulo miden a, b y c, los del segundo medirán $1{,}2a$, $1{,}2b$ y $1{,}2c$, con lo que $\dfrac{a}{1{,}2a} = \dfrac{b}{1{,}2b} = \dfrac{c}{1{,}2c} = \dfrac{5}{6}$ son triángulos semejantes, y la razón de semejanza es $\dfrac{5}{6}$.

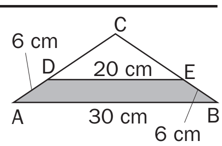
3. En los cuatro triángulos los lados miden lo mismo, la mitad de cada uno de los lados del triángulo inicial y, por el teorema de Tales, los ángulos también son iguales, luego los cuatro triángulos son iguales. Además, son proporcionales al triángulo dado por la misma razón, los ángulos son iguales, siendo la razón de semejanza $\dfrac{1}{2}$.

4. a) Los triángulos ABC y DEF tienen los lados paralelos, por lo que los ángulos correspondientes son iguales. Por tanto, son triángulos semejantes.

b) Los triángulos ABC y DBE tienen un ángulo común, $\widehat{B}$, y otro igual, $\widehat{E} = \widehat{C} = 90°$. Por tanto, son triángulos semejantes.

c) Los triángulos rectángulos ABC y ACD tienen un ángulo común, $\widehat{A}$, y otro igual, $\widehat{D} = \widehat{C} = 90°$. Por tanto, son triángulos semejantes.

5. a) Isósceles, ya que dos ángulos $\widehat{D}$, $\widehat{E}$, son iguales.



b) Los triángulos ABC y DEC son semejantes, luego:

$$\frac{\overline{AC}}{\overline{DC}} = \frac{\overline{BC}}{\overline{EC}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{DE}};$$

$$\frac{6 + \overline{DC}}{\overline{DC}} = \frac{6 + \overline{EC}}{\overline{EC}} = \frac{30}{20} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \overline{DC} = \overline{EC} = 12 \text{ cm}$$

6. $\begin{cases} \dfrac{4}{x} = \dfrac{3}{y} \\ x^2 + y^2 = 10^2 \end{cases} \Rightarrow$

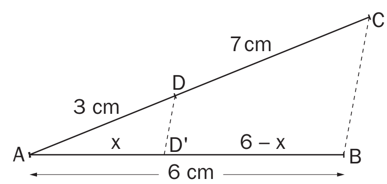
$\Rightarrow x^2 + \dfrac{9x^2}{16} = 100 \Rightarrow y = \dfrac{3x}{4} \Rightarrow$

$\Rightarrow \dfrac{25x^2}{16} = 100 \Rightarrow x = 8$ cm, $y = 6$ cm

7. Para que sean semejantes debe verificarse que $\dfrac{\overline{AD}}{\overline{DC}} = \dfrac{\overline{DC}}{\overline{ED}}$. Llamando $x = \overline{AE}$, $h = \overline{ED}$, tendremos: $\dfrac{x + h}{x} = \dfrac{x}{h} \Rightarrow x^2 - hx - h^2 = 0$, que, resuelta, considerando x como la incógnita, se obtiene $x = h\left(\dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}\right) \Rightarrow \dfrac{x}{h} = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$. Es decir, los rectángulos son semejantes si los lados están en proporción áurea.

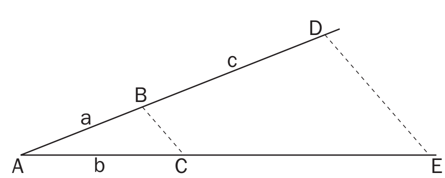
8. $\dfrac{x}{6 - x} = \dfrac{3}{7} \Rightarrow x = 1{,}8$ cm. Los segmentos medirán 1,8 cm y 4,2 cm.

Gráficamente, trazamos una semirrecta de origen A y sobre ella se llevan dos segmentos consecutivos de 3 y 7 cm. El extremo C se une con B y por D se traza una paralela a la recta CB. El segmento $\overline{AB}$ queda dividido en dos segmentos proporcionales a 3 y 7.



9. $\dfrac{2}{2{,}5} = \dfrac{3}{x} \Rightarrow x = 3{,}75$ cm

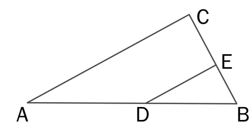
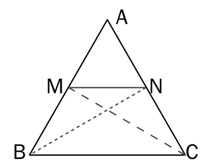
Para resolverlo gráficamente, trazamos dos semirrectas de origen A y sobre una de ellas se llevan consecutivamente los segmentos a y c, y sobre la otra el segmento b; uniendo los extremos no comunes B y C. Se traza una paralela a $\overline{BC}$ por D, extremo del segmento c. El segmento $\overline{CE}$ es el segmento buscado.



10. $\dfrac{10}{16} = \dfrac{16}{x} \Rightarrow x = 25{,}6$ mm

Gráficamente, trazamos dos semirrectas de origen A y sobre una de ellas se llevan consecutivamente los segmentos a y b, y sobre la otra el segmento b. El extremo B se une con C y se traza por D una paralela a $\overline{BC}$. El segmento $\overline{CE}$ es el segmento buscado.

6 | Figuras semejantes. Teorema de Tales

CRITERIOS	ACTIVIDADES
A. Utilizar la razón de semejanza de dos figuras semejantes.	1. Un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 12 cm es semejante a otro cuyo perímetro es 78 cm. a) Halla la medida de los lados del segundo triángulo. b) Halla la razón de semejanza. 2. Los lados homólogos de dos pentágonos miden 16 y 24 cm, respectivamente. Sabiendo que el área del primero es de 180 cm², calcula el área del segundo pentágono.
B. Reconocer figuras semejantes aplicando el teorema de Tales.	3. Calcula la medida del segmento *DE* de la figura sabiendo que *BE* = 4 cm, *EC* = 6 cm y *AC* = 20 cm, y que la recta *AC* es paralela a *DE*. 
C. Aplicar los criterios de semejanza de triángulos.	4. Sobre los lados iguales *AB* y *AC* de un triángulo isósceles se toman segmentos iguales *BM* y *CN*. Prueba que los triángulos *BCM* y *CBN* son iguales y, por tanto, *CM* = *BN*. 
D. Interpretar representaciones planas utilizando la escala y obtener información sobre las mismas.	5. La distancia entre dos pueblos es de 24 km. En un plano de carreteras hemos medido la distancia entre ambos y hemos obtenido 1,2 cm. a) ¿Cuál es la escala del mapa? b) Si la escala del mapa fuese de 1 : 500 000, ¿cuál sería la distancia sobre el papel entre ambos pueblos?
E. Resolver problemas relacionados con la semejanza de figuras geométricas.	6. María mide 1,62 m. En el momento en que su sombra mide 196 cm, la sombra de la torre de la iglesia de su pueblo mide 24 m. ¿Cuánto mide la torre?

SOLUCIONES

1. a) $\begin{cases} \dfrac{6}{x} = \dfrac{8}{y} = \dfrac{12}{z} \\ x + y + z = 78 \end{cases}$

$$x + \frac{8x}{6} + \frac{12x}{6} = 78$$

$x = 18$ cm, $y = 24$ cm, $z = 36$ cm

b) $k = \dfrac{6}{18} = \dfrac{8}{24} = \dfrac{12}{36} = \dfrac{1}{3}$ o también

$$k = \frac{6 + 8 + 12}{78} = \frac{26}{78} = \frac{1}{3}$$

2. $\begin{cases} k = \dfrac{16}{24} \\ k^2 = \dfrac{180}{x} \end{cases} \Rightarrow \left(\dfrac{2}{3}\right)^2 = \dfrac{180}{x} \Rightarrow$

$$\Rightarrow x = \frac{9 \cdot 180}{4} = 405 \text{ cm}^2$$

3. Los triángulos *ABC* y *DBE* son semejantes, luego:

$$\frac{BE}{BC} = \frac{DE}{AC} \Rightarrow \frac{4}{4+6} = \frac{DE}{20} \Rightarrow DE = 8 \text{ cm}$$

4. Los triángulos *BCM* y *CBN* son iguales porque tienen un lado común, *BC*; dos lados iguales, *BC* y *CN*, y dos ángulos iguales, $\widehat{CBM} = \widehat{BCN}$.

5. a) $k = \dfrac{1{,}2}{2\,400\,000} = \dfrac{1}{2\,000\,000}$

La escala es 1 : 2 000 000

b) $k' = \dfrac{1}{500\,000} = \dfrac{x}{2\,400\,000} \Rightarrow x = 4{,}8$ cm

6. $\dfrac{162}{196} = \dfrac{x}{24} \Rightarrow x = 19{,}84$ m

6 Figuras semejantes. Teorema de Tales

Nombre .... Grupo .... Fecha ....../....../......

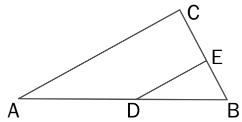
1. Un triángulo cuyos lados miden 6, 8 y 12 cm es semejante a otro cuyo perímetro es 78 cm.

a) Halla la medida de los lados del segundo triángulo.

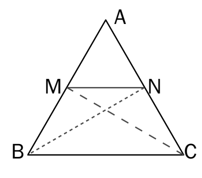
b) Halla la razón de semejanza.

2. Los lados homólogos de dos pentágonos miden 16 y 24 cm, respectivamente. Sabiendo que el área del primero es de 180 cm^2, calcula el área del segundo pentágono.

3. Calcula la medida del segmento *DE* de la figura sabiendo que $BE = 4$ cm, $EC = 6$ cm y $AC = 20$ cm, y que la recta AC es paralela a *DE*.



4. Sobre los lados iguales *AB* y *AC* de un triángulo isósceles se toman segmentos iguales *BM* y *CN*. Prueba que los triángulos *BCM* y *CBN* son iguales y, por tanto, $CM = BN$.



5. La distancia entre dos pueblos es de 24 km. En un plano de carreteras hemos medido la distancia entre ambos y hemos obtenido 1,2 cm.

a) ¿Cuál es la escala del mapa?

b) Si la escala del mapa fuese de 1 : 500 000, ¿cuál sería la distancia sobre el papel entre ambos pueblos?

6. María mide 1,62 m. En el momento en que su sombra mide 196 cm, la sombra de la torre de la iglesia de su pueblo mide 24 m. ¿Cuánto mide la torre?

6 Figuras semejantes. Teorema de Tales

1. Los lados de un cuadrilátero ABCD miden 4 cm, 6 cm, 10 cm y 15 cm, y los lados de otro cuadrilátero A′B′C′D′ miden 5 cm, 7,5 cm, 12,5 cm y 18,75 cm. ¿Son semejantes ambos cuadriláteros? Si lo son, calcula la razón de semejanza.

2. Un triángulo de lados 5, 6 y 8 cm es semejante a otro cuyo lado menor mide 7 cm. Halla sus otros dos lados.

3. Los lados de un triángulo miden 10, 15 y 20 cm, y otro triángulo semejante al dado tiene un perímetro de 54 cm. Halla la medida de sus lados.

4. Un triángulo ABC es semejante a otro A′B′C′, siendo 2 la razón de semejanza. A su vez, el triángulo A′B′C′ es semejante a otro triángulo A″B″C″, siendo 5 la razón de semejanza en este caso. ¿Son semejantes ABC y A″B″C″? ¿Cuál es la razón de semejanza?

5. El ángulo desigual de dos triángulos isósceles mide 42°.

a) Calcula la medida de los otros ángulos.

b) ¿Son semejantes ambos triángulos?

c) Sabiendo que el lado desigual del triángulo mayor mide 20 cm y el del menor 12 cm, halla la razón de las áreas de ambos triángulos.

6. La distancia en un mapa entre dos ciudades que se encuentran en realidad a 950 km es de 19 cm.

a) ¿Cuál es la escala de representación del mapa?

b) ¿Cuál será la distancia entre otras dos ciudades que en el mapa se encuentran a 4,2 cm?

7. En el instante en que una estaca de 1,2 m clavada en el suelo proyecta una sombra de 80 cm, la sombra de una torre cercana mide 16 m. ¿Cuál es la altura de la torre?

8. En un mapa de escala 1:1 500 000, el pueblo de Villablanca está separado del pueblo de Villaverde 1,12 cm.

a) ¿Cuál es la distancia real entre ambos pueblos?

b) Si hacemos una fotocopia reducida al 50 % del mapa, ¿cuál será la escala del mapa fotocopiado?

9. Los lados de una finca cuadrangular miden 40, 60, 80 y 90 m. Su dueño tiene una parcela semejante cuyo lado mayor mide 120 m. ¿Cuántos metros de alambre necesita para vallarla?

10. ¿Qué superficie ocupa en un mapa un país de 8 650 km^2 si la escala del mismo es de 1:5 000 000?

SOLUCIONES

1. Son semejantes, porque $\frac{4}{5} = \frac{6}{7{,}5} = \frac{10}{12{,}5} = \frac{15}{18{,}75} = 0{,}8$, que es la razón de semejanza.

2. $\frac{5}{7} = \frac{6}{x} = \frac{8}{y}$

$x = \frac{6 \cdot 7}{5} = 8{,}4$ cm, $y = \frac{8 \cdot 7}{5} = 11{,}2$ cm

3. $\begin{cases} \frac{10}{x} = \frac{15}{y} = \frac{20}{z} \\ x + y + z = 54 \end{cases} \Rightarrow x + \frac{15x}{10} + \frac{20x}{10} = 54 \Rightarrow$

$\Rightarrow 45x = 540 \Rightarrow x = 12$

Los lados miden $x = 12$ cm; $y = \frac{15 \cdot 12}{10} = 18$ cm, $z = \frac{20 \cdot 12}{10} = 24$ cm

4. Sí son semejantes y la razón de semejanza es $k = 2 \cdot 5 = 10$.

5. a) $\alpha = \frac{180° - 42°}{2} = 69°$

b) Sí, porque tienen sus ángulos iguales.

c) $k = \frac{12}{20} = 0{,}6 \Rightarrow$ la razón de semejanza entre las áreas es $k^2 = 0{,}36$.

6. a) $k = \frac{19}{95\,0000\,000} = \frac{1}{5\,000\,000}$

La escala es 1:5 000 000.

b) $4{,}2\ k = 4{,}2 \cdot 5\,000\,000 = 21\,000\,000$ cm $= 210$ km

7. Para calcular la altura de la torre utilizamos la proporción $\frac{1{,}2}{0{,}80} = \frac{x}{16} \Rightarrow x = \frac{16 \cdot 1{,}2}{0{,}80} = 24$ m

8. a) $d = 1{,}12 \cdot 1\,500\,000 = 1\,680\,000$ cm $= 16{,}8$ km

b) 1:3 000 000

9. $\frac{40}{x} = \frac{60}{y} = \frac{80}{z} = \frac{90}{120} \Rightarrow x = \frac{40 \cdot 120}{90} = 53{,}\widehat{3}$ m,

$y = \frac{60 \cdot 120}{90} = 80$ m, $z = \frac{80 \cdot 120}{90} = 106{,}\widehat{6}$ m

Necesita $53{,}\widehat{3} + 80 + 106{,}\widehat{6} + 120 = 360$ m de alambre.

Otro método más directo para resolver el problema sería calcular el perímetro de la primera parcela, 270 m, y multiplicarlo por la razón de semejanza, $\frac{120}{90}$; el resultado sería $270 \cdot \frac{4}{3} = 360$ m.

10. $k = \frac{1}{5\,000\,000} \Rightarrow S = k^2 \cdot 8\,650 \cdot 10^{10}\ \text{cm}^2 = 3{,}46\ \text{cm}^2$