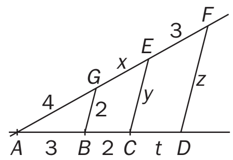
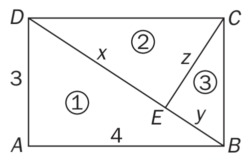
6 La semejanza en el plano

1. Calcula las medidas de los segmentos x, y, z, t en la siguiente figura, sabiendo que las medidas de los segmentos conocidos están expresadas en metros.

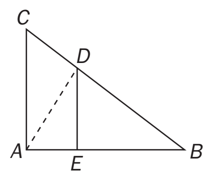


2. Dibuja un hexágono regular y, tomando como vértices los puntos medios de sus lados, traza un nuevo hexágono. ¿Son semejantes ambos hexágonos? ¿Cuál es la razón de semejanza entre ambas figuras? Si el primero tiene 6 cm de lado, calcula el área del segundo hexágono.

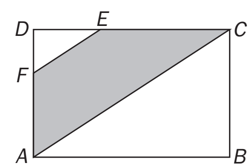
3. Demuestra que en cualquier rectángulo $ABCD$ se pueden determinar tres triángulos semejantes 1, 2 y 3 como indica la figura, trazando desde un vértice la perpendicular a la diagonal opuesta. Basándote en ello, calcula las longitudes x, y, z del rectángulo de la figura.



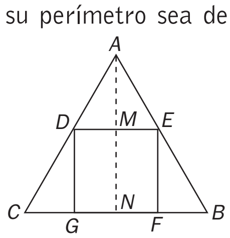
4. En el triángulo rectángulo ABC rectángulo en A, cuyos catetos AC y AB miden, respectivamente, 6 y 8 m, se traza la altura AD y desde D se traza una paralela al cateto AC, que corta en E al otro cateto AB. Calcula el perímetro y el área del trapecio de vértices $ACDE$.



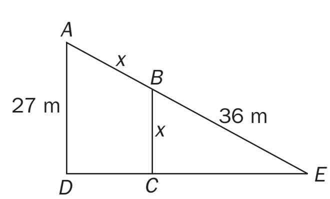
5. En el rectángulo $ABCD$, cuyos lados miden $AB = 24$ cm y $BC = 10$ cm, se traza una paralela EF a la diagonal AC. Sabiendo que $DF = 4$ cm, ¿cuánto miden el perímetro y el área del trapecio $ACEF$?



6. En un triángulo isósceles ABC, cuyos lados iguales $AB = AC$ miden 10 cm y el lado básico BC mide 12 cm, se inscribe un rectángulo $DEFG$ centrado respecto a la altura del triángulo, como indica la figura. Calcula las medidas de los lados del rectángulo para que su perímetro sea de 20 centímetros.



7. En el triángulo ADE, rectángulo en D, se construye el trapecio $ABCD$ tal que los lados AB y BC tienen la misma medida, x. Calcula el perímetro del trapecio, teniendo en cuenta las medidas de los segmentos $AD = 27$ m y $BE = 36$ m.



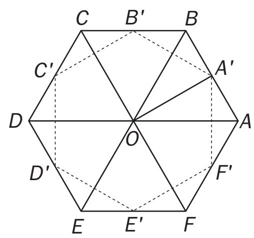
SOLUCIONES

1. Por el teorema de Tales:

$$\frac{AG}{AB} = \frac{GE}{BC} = \frac{EF}{CD}; \frac{4}{3} = \frac{x}{2} = \frac{3}{t}; \ x = \frac{8}{3}; \ t = \frac{9}{4}$$

$$\frac{AB}{BG} = \frac{AC}{CE} = \frac{AD}{DF}; \frac{3}{2} = \frac{5}{y} = \frac{5+t}{z}; \ y = \frac{10}{3}; \ z = \frac{29}{6}$$

2. Son semejantes por tener iguales sus ángulos interiores (120°). Si L y a_p son el lado y la apotema del dado, aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo $OA'B$:



$$a_p = \sqrt{L^2 - \left(\frac{L}{2}\right)^2} = \sqrt{36 - 9} = \sqrt{27}$$

Su área es $S = 3L \cdot a_p = 18\sqrt{27}$

Como el lado del hexágono inscrito es $L' = a_p$, la razón de semejanza es $k = \frac{L}{L'} \cdot \frac{6}{\sqrt{27}}$.

El área S' del hexágono inscrito es:

$$\frac{S}{S'} = \frac{36}{27} \Rightarrow S' = \frac{3S}{4} \approx 70{,}14 \text{ cm}^2$$

3. En efecto, $\widehat{ABD} = \widehat{BDC}$ determinados por dos paralelas y una secante y $\widehat{ABD} = \widehat{ECD}$ de lados perpendiculares. En el triángulo 1: $BD = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.

Por semejanza, en los triángulos 1 y 2:

$$\frac{AD}{EC} = \frac{AB}{ED} = \frac{DB}{DC}; \ \frac{3}{z} = \frac{4}{x} = \frac{5}{4}; \ x = 3{,}2 \text{ cm}; \ z = 2{,}4 \text{ cm}$$

Por semejanza, en los triángulos 1 y 3:

$$\frac{AD}{EB} = \frac{AB}{EC} = \frac{DB}{BC}; \ \frac{3}{y} = \frac{4}{z} = \frac{5}{3}; \ y = 1{,}8 \text{ cm}$$

4. En ABC: $CB = \sqrt{6^2 + 8^2} = 10 \Rightarrow$

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} CB \cdot CD = 6^2; \ CD = 3{,}6 \\ CB \cdot BD = 8^2; \ BD = 6{,}4 \end{array} \right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AD^2 = CD \cdot DB \Rightarrow AD = 4{,}8$$

Por semejanza: $EDA \approx DAC$, se tiene

$$\frac{AD}{AC} = \frac{ED}{DA} = \frac{EA}{DC} \Rightarrow \frac{4{,}8}{6} = \frac{ED}{4{,}8} = \frac{EA}{3{,}6} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow ED = 3{,}84; \ EA = 2{,}88$$

El perímetro es:

$$P = AC + CD + DE + EA = 16{,}32 \text{ m}$$

El área es: $S = \dfrac{(AC + ED) \cdot AE}{2} \approx 14{,}17 \text{ m}^2$

5. En el triángulo ACD: $AC = \sqrt{AD^2 + DC^2} = 26$ cm, sean $EC = x$, $FA = 10 - 4 = 6$ cm y $EF = z$. Por la semejanza de los triángulos DEF y DAC:

$$\frac{FE}{AC} = \frac{DE}{DC} = \frac{DF}{AD} \Rightarrow \frac{z}{26} = \frac{24 - x}{24} = \frac{4}{10} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow x = 14{,}4; \ z = 10{,}4$$

El perímetro del trapecio es:

$$P = AF + FE + EC + CA = 56{,}8 \text{ cm}$$

El área es:

$$S_{AFEC} = S_{DCA} - S_{DEF} = \frac{1}{2} AD \cdot DC - \frac{1}{2} FD \cdot ED = $$
$$= 100{,}8 \text{ cm}^2$$

6. Los triángulos AME y ANB son semejantes por estar en posición de Tales: $\dfrac{AM}{AN} = \dfrac{ME}{NB}$

Por otro lado:

$$AN = \sqrt{AB^2 - NB^2} = \sqrt{100 - 36} = 8 \text{ cm}$$

y llamando $2x = DE$, $y = MN$, de la relación de Tales, se tiene: $\dfrac{8 - y}{8} = \dfrac{x}{6} \Rightarrow y = \dfrac{4(6 - x)}{3}$

Teniendo en cuenta que el perímetro es 20 cm:

$$4x + 2y = 20 \Rightarrow 4x + \frac{8(6 - x)}{3} = 20 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \{x = 3; \ y = 4\}$$

Los lados del rectángulo miden 6 cm y 4 cm.

7. Los triángulos DAE y CBE están en posición de Tales: $\dfrac{AE}{BE} = \dfrac{AD}{BC} \Rightarrow \dfrac{x + 36}{36} = \dfrac{27}{x}$, cuya única solución posible es $x = 18$ m.

Por otro lado:

$$DC = DE - CE = \sqrt{AE^2 - AD^3} - \sqrt{BE^2 - BC^2} \Rightarrow$$

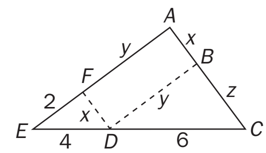
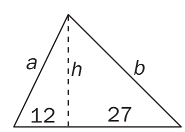
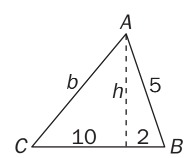
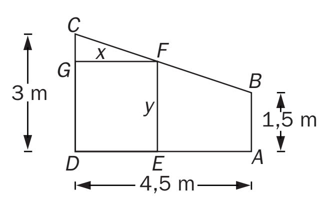
$$\Rightarrow DC = \sqrt{54^2 - 27^2} - \sqrt{36^2 - 18^2} \approx 15{,}59$$

El perímetro es:

$$p = DA + AB + BE + CD \approx 27 + 18 + 18 + 15{,}59$$

de valor aproximado 78,59 m.

6 | La semejanza en el plano

CRITERIOS	ACTIVIDADES
A. Reconocer figuras semejantes y calcular la razón de semejanza entre sus magnitudes: lados, perímetros y áreas.	1. Calcula las medidas de los segmentos x, y, z en la siguiente figura. ¿Cuántas soluciones hay?  2. Las diagonales de un rombo miden 12 y 16 cm, respectivamente. Halla el área de otro rombo semejante de 100 cm de perímetro.
B. Conocer el teorema de Tales y aplicarlo para representar puntos que determinan segmentos de razones dadas.	3. Dibuja sobre una recta 4 puntos A, B, C y D de modo que se verifiquen las siguientes razones: $\frac{AB}{AC} = 2$ y $\frac{AD}{CB} = 5$. ¿Qué teorema utilizas para hacerlo?
C. Aplicar los criterios de semejanza de triángulos en la resolución de problemas.	4. Para determinar la altura de un objeto, una persona de 1,70 m de altura sitúa un espejo en el suelo entre ella y el objeto, de forma que todos ellos, objeto, espejo y persona, quedan en un mismo plano. Si el espejo dista 10 m del objeto y 2 m de la persona, ¿qué altura tiene el objeto?
D. Conocer los teoremas relativos a los triángulos rectángulos y aplicarlos para resolver problemas.	5. En el triángulo rectángulo de la figura, calcula el cateto b, la altura h, correspondiente al vértice A, y el área. 
E. Conocer los teoremas relativos a los triángulos cualesquiera y aplicarlos en la solución de problemas.	6. Calcula el lado b y la altura h del triángulo de la figura. ¿Se trata de un triángulo rectángulo? 
F. Resolver problemas geométricos en los que incida la semejanza.	7. La buhardilla de una casa es el trapecio $ABCD$ de la figura. Se desea colocar el marco de una ventana $DEFG$ rectangular de 18 metros de perímetro. Halla las dimensiones del marco. 

SOLUCIONES

1. Por el teorema de Tales:

$$\frac{2}{4} = \frac{y}{6} \Rightarrow y = 3$$

Por la semejanza de los triángulos EDF y ECA:

$$\frac{x}{4} = \frac{x + z}{10} \qquad z = \frac{3x}{2}$$

Para cada valor de x se obtiene un valor de z. Hay infinitas soluciones.

2. Sean $D = 8$, $d = 6$ las semidiagonales del rombo dado, D' y d' las del rombo semejante, x su lado, k la razón de semejanza, y S el área pedida. Se tiene:

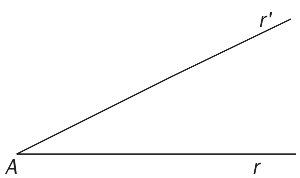
$D' = k \cdot D = 8k$

$d' = k \cdot d = 6k$

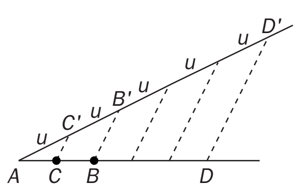
$$\left.\begin{array}{l} x = \sqrt{D'^2 + d'^2} = 10k \\ 4x = 100 \Rightarrow 40k = 100 \end{array}\right\} \Rightarrow k = 2{,}5 \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} D' = 20 \text{ cm} \\ d' = 15 \text{ cm} \end{array}\right.$$

$S = 2D'd' = 600 \text{ cm}^2$

3. Dibujamos una recta, r, y marcamos en ella un punto, A. Por este punto, trazamos otra recta, r'.



Sobre r' llevamos 5 segmentos de igual longitud u, y en ella los puntos C', B' y D'. Trazando tres paralelas por C', B' y D' se obtienen los puntos C, B y D, que cumplen con las condiciones del problema.



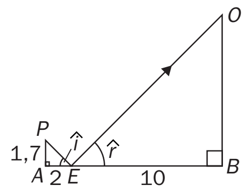
Efectivamente, aplicando el teorema de Tales:

$$\frac{AC}{AC'} = \frac{AB}{AB'} \qquad \frac{AD}{AD'} = \frac{AB}{C'B'}$$

Por tanto:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{AC}{u} = \dfrac{AB}{2u} \\ \dfrac{AD}{5u} = \dfrac{CB}{u} \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} \dfrac{AB}{AC} = 2 \\ \dfrac{AD}{CB} = 5 \end{array}\right\}$$

4. Si AP es la persona, BO el objeto, E el espejo, $\hat{i} = \hat{r}$.



Por la semejanza de los triángulos EAP y EBO, podemos escribir:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{BO}{AP} = \dfrac{EB}{AE} \\ \dfrac{BO}{1{,}70} = \dfrac{10}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow BO = 8{,}50$$

El objeto mide 8,50 m.

5. Se aplica el teorema de la altura para hallar h:

$$h^2 = 12 \cdot 27;\ h = 18$$

La altura h mide 18 cm.

Se aplica el teorema de Pitágoras al triángulo AHB:

$c = \sqrt{18^2 + 12^2} \approx 21{,}63$

$b = \sqrt{18^2 + 27^2} \approx 32{,}45$

El cateto b mide 32,45 cm.

Área: $S = \dfrac{(12 + 27)18}{2} = 351$

El área mide 351 cm^2.

6. Se aplica el teorema del cateto:

$$b^2 = 12^2 + 5^2 - 2 \cdot 12 \cdot 10;\ b = 11$$

El lado b mide 11 cm.

Teorema de Pitágoras: $h = \sqrt{5^2 - 2^2} = \sqrt{21}$

El triángulo no es rectángulo: $11^2 + 5^2 \neq 12^2$

7. Sean x e y las dimensiones del marco.

El lado CB se calcula por el teorema de Pitágoras:

$$CB = \sqrt{(3 - 1{,}5)^2 + 4{,}5^2} \approx 4{,}74$$

$ABCD$ y $EFCD$ son semejantes, luego sus bases son proporcionales:

$$\frac{BA}{FE} = \frac{FE}{CD};\ \frac{1{,}5}{y} = \frac{y}{3};\ y = \sqrt{4{,}5} \approx 2{,}12$$

De la condición del perímetro:

$$2x + 2y = 18;\ x \approx 6{,}88$$

Las dimensiones del marco son: 2,12 m y 6,88 m

6 La semejanza en el plano

1. Dibuja sobre una recta tres puntos *A*, *B* y *C*, de forma que los segmentos *AB* y *AC* tengan una razón igual a $\frac{3}{2}$. ¿En qué teorema te basas para la construcción?

2. Un padre y su hijo contemplan una torre de 45 metros de altura. El padre tiene una altura de 1,80 m y proyecta una sombra de 50 cm. El hijo proyecta una sombra de 30 cm. Se pide:

a) ¿Qué altura tiene el hijo?

b) ¿Cuánto mide la sombra que proyecta la torre en ese momento del día?

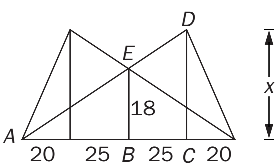
3. Se ha hecho una fotocopia, reducida al 40 %, de un plano en el que aparece dibujado un rectángulo. Como el dibujo aparece muy pequeño, se ha hecho una ampliación de la fotocopia del plano al 150 %, de modo que en ella los lados del rectángulo miden 3 cm y 4 cm. Calcula el área del rectángulo original que aparece en el plano.

4. En un papel rectangular de 90×60 centímetros se dibuja un rectángulo semejante al contorno del papel y centrado respecto a los lados, cuya área es de 2 400 cm^2. ¿A qué distancia de los bordes del papel quedan los lados del rectángulo?

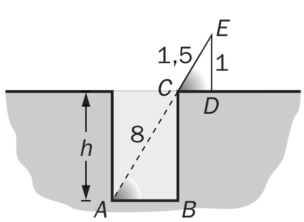
5. Las bases de un trapecio isósceles miden 18 cm y 30 cm, y la altura, 6 cm. Calcula la altura del triángulo que tiene como lados la base menor del trapecio y las prolongaciones de sus lados no paralelos.

6. La base de un triángulo isósceles mide 6 cm, y la altura correspondiente a uno de los lados iguales mide 4 cm. Halla el área del triángulo y el área de otro semejante tal que la razón de semejanza respecto del anterior sea de 1,2.

7. La figura muestra parte de la estructura del entramado de la nave de una fábrica. Con las medidas que se dan, en metros, determina la altura *x* de la misma.



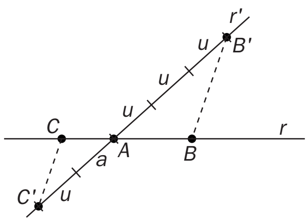
8. Para medir la capacidad de un pozo cilíndrico, un agricultor introduce un palo recto de 9,5 m de largo, según se indica en la figura, de forma que la parte *CD* que sobresale mide 1,5 m, y el extremo del palo, *D*, está situado a 1 m del suelo. Calcula cuántos litros es capaz de almacenar el pozo.



SOLUCIONES

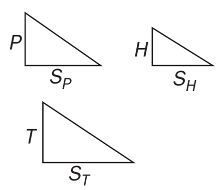
1. Dibujamos r y r'.

Trazamos sobre r' $AB' = 3$ y $AC' = 2$. Las paralelas, por B' y C', cortan a r en B y C, respectivamente. Por el teorema de Tales, se tiene:



$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} \Rightarrow \frac{AB}{3} = \frac{AC}{2} \Rightarrow \frac{AB}{AC} = \frac{3}{2}$$

2. Sean P, H y T las alturas del padre, el hijo y la torre, respectivamente, y S_P, S_H y S_T las longitudes de sus respectivas sombras, en centímetros. Por semejanza:

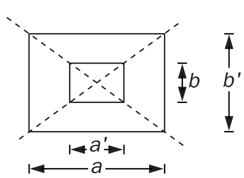


$$\frac{P}{S_P} = \frac{H}{S_H} = \frac{T}{S_T} \Rightarrow \frac{180}{50} = \frac{H}{30} = \frac{4\,500}{S_T} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow H = 108 \text{ cm}; \; S_T = 1\,250 \text{ cm}$$

3. Sean L y L' las longitudes, en centímetros, del objeto original y de la última fotocopia, y S y S' sus respectivas superficies. Se tiene:

$$\frac{L}{L'} = 0{,}4 \cdot 1{,}5 = 0{,}6; \; \frac{S}{S'} = 0{,}6^2 = 0{,}36 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \frac{S}{12} = 0{,}36 \Rightarrow S = 4{,}32 \text{ cm}^2$$

4. Sean S y S' las superficies de la hoja de papel y del rectángulo, respectivamente. Su razón es:

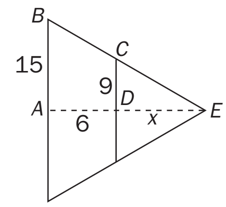


$$\frac{S}{S'} = \frac{90 \cdot 60}{2\,400} = 2{,}25, \text{ por tanto:}$$
$$\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \sqrt{2{,}25} = 1{,}5$$
$$a' = 60 \text{ cm}; \; b' = 40 \text{ cm}.$$

Al estar centrados, las separaciones son:

$$\frac{a - a'}{2} = 15 \text{ cm}; \; \frac{b - b'}{2} = 10 \text{ cm}$$

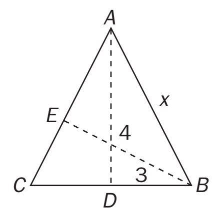
5. Los triángulos rectángulos AEB y DEC están en posición de Tales. Se tiene: $\dfrac{AB}{CD} = \dfrac{AE}{DE} \Rightarrow$



$$\Rightarrow \frac{15}{9} = \frac{6 + x}{x}$$

$x = 9$ cm, que es la medida de la altura.

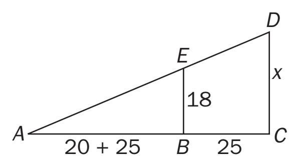
6. Aplicando el teorema de Pitágoras al triángulo rectángulo DAB: $AD = \sqrt{x^2 - 9}$. El área S del triángulo puede calcularse de dos formas:



$$S = \frac{AC \cdot BE}{2} = \frac{CB \cdot AD}{2}$$
$$2x = 3\sqrt{x^2 - 9}$$
$$x = \sqrt{16{,}2} = 4{,}02 \text{ cm}$$

Su área vale $S = \dfrac{4{,}02 \cdot 4}{2} = 8{,}05 \text{ cm}^2$. El área del otro triángulo es: $S' = 8{,}05 \cdot 1{,}2^2 = 11{,}59 \text{ cm}^2$

7. Tomando los triángulos ACD y ABE, semejantes, por estar en posición de Tales, se puede escribir:



$$\frac{CD}{EB} = \frac{AC}{AB} \Rightarrow \frac{x}{18} = \frac{70}{45}$$
$$x = 28 \text{ m}$$

8. Los triángulos rectángulos ABC y CDE son semejantes. Si h es la profundidad del pozo, se tiene:

$$\frac{h}{1} = \frac{8}{1{,}5} \Rightarrow h = 5{,}33 \text{ m}$$

El diámetro del pozo es: $AB = \sqrt{8^2 - h^2} = 5{,}96$ m

El volumen es:

$$V = \pi \cdot \left(\frac{AB}{2}\right)^2 \cdot h = 148{,}624 \text{ m}^3 = 148\,624 \text{ litros}$$