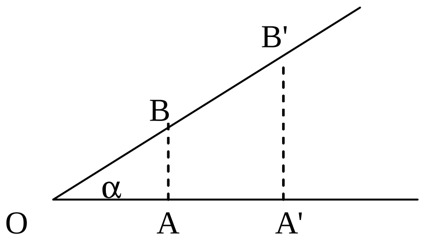
TRIGONOMETRÍA

Razones trigonométricas :



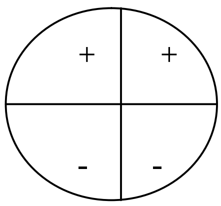
$\text{sen}\alpha = AB/OB = A'B'/OB'$
$\cos\alpha = OA/OB = OA'/OB'$
$\text{tg}\alpha = AB/OA = A'B'/OA'$
$\text{cotg}\alpha = OA/AB = OA'/A'B'$
$\sec\alpha = OB/OA = OB'/OA'$
$\text{cosec}\alpha = OB/AB = OB'/A'B'$

Relación entre las razones trigonométricas :

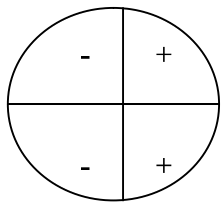
$\text{tg}\alpha = \text{sen}\alpha/\cos\alpha$ $\quad$ $\text{cotg}\alpha = \cos\alpha/\text{sen}\alpha = 1/\text{tg}\alpha$
$\sec\alpha = 1/\cos\alpha$ $\quad$ $\text{cosec}\alpha = 1/\text{sen}\alpha$
$\text{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $\quad$ $\text{tg}^2\,\alpha + 1 = \sec^2\alpha$ $\quad$ $\text{cotg}^2\alpha + 1 = \text{cosec}^2\alpha$

Signo de las razones trigonométricas :

$\text{sen}\alpha$



$\cos\alpha$



Reducción al primer cuadrante :

sen(180-x)=senx
cos(180-x)=-cosx

sen(180+x)=-senx
cos(180+x)=-cosx

sen(360-x)=-senx
cos(360-x)=cosx

sen(90-x)=cosx
cos(90-x)=senx

sen(90+x)=cosx
cos(90+x)=-senx

sen(270-x)=-cosx
cos(270-x)=-senx

sen(270+x)=-cosx
cos(270+x)=senx

sen(-x)=-senx
cos(-x)=cosx

Razones trigonométricas de adición :

sen(x+y) = senxcosy + senycosx
sen(x-y) = senxcosy - senycosx

cos(x+y) = cosxcosy - senxseny
cos(x-y) = cosxcosy + senxseny

Fórmulas del ángulo doble :

sen2x = 2senxcosx
$\cos 2x = \cos^2 x - \text{sen}^2 x$

Fórmulas del ángulo mitad :

$$\cos\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}$$

$$\operatorname{sen}\frac{x}{2}=\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$$

Transformación de sumas en productos :

$$\operatorname{sen} x+\operatorname{sen} y=2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\operatorname{sen} x-\operatorname{sen} y=2\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}\cos\frac{x+y}{2}$$

$$\cos x+\cos y=2\cos\frac{x+y}{2}\cos\frac{x-y}{2}$$

$$\cos x-\cos y=-2\operatorname{sen}\frac{x+y}{2}\operatorname{sen}\frac{x-y}{2}$$

Tª del seno : $\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{b}{\operatorname{sen} B}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}=2r$

Tª del coseno : $a^2 = b^2 + c^2 - 2\cdot b\cdot c\cdot \cos A$

Fórmulas de Briggs y Herón : (siendo a+b+c=2p)

$$\operatorname{sen}\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{(p-c)(p-b)}{b\cdot c}}$$

$$\cos\frac{A}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{b\cdot c}}$$

$$S=\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS

Núm	*Concepto*	*Observaciones*
1	Pasar de ***grados*** *a* ***radianes***	Mediante una regla de tres (sabiendo que 360º valen 2 A rad.)
2	Pasar de ***radianes*** **a** ***grados***	Mediante una regla de tres (sabiendo que 360º valen 2 A rad.)
3	Reducir ángulos al **primer giro**	a) Si el ángulo está en grados: Se divide entre 360º y se calcula el resto de la división. b) Si el ángulo está en radianes: Se divide entre 2 A y se calcula el resto de la división.
4	**Definiciones** de ***seno, coseno y tangente*** en un ángulo agudo (triángulo rectángulo). *Conocimientos previos:* *A) Teorema de Pitágoras* *B) La suma de los ángulos de un triángulo es de 180º.*	$sen\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{hipotenusa}$ $\cos\alpha = \frac{cateto\ contiguo}{hipotenusa}$ $tg\,\alpha = \frac{cateto\ opuesto}{cateto\ contiguo} = \frac{sen\,\alpha}{\cos\alpha}$
5	**Definiciones de cosecante, secante y cotangente**	Las inversas de las funciones anteriores
6	Propiedades en un ángulo agudo	$0 < sen\,\alpha < 1$ $0 < \cos\alpha < 1$ $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \quad (= \frac{1}{\cos^2\alpha})$
7	Razones trigonométricas de los ángulos de 0º,30º, 45º , 60º y 90º	Conviene sabérselas de memoria. (Cuadro del final)
8	Razones trigonométricas de un ángulo cualquiera (circunferencia)	Saber dibujar el ángulo y localizar los cuadrantes
9	Signos de las razones trigonométricas en cada cuadrante	
10	Propiedades en un ángulo cualquiera	$-1 \le sen\,\alpha \le 1$

		$-1 \leq \cos\alpha \leq 1$ $sen^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$ $tg^2\alpha + 1 = \sec^2\alpha \quad (= \frac{1}{\cos^2\alpha})$
11	Determinación de ángulos	a) gráficamente b) numéricamente (con calculadora)
12	Relación entre las razones trigonométricas de ángulos de diferente cuadrante.	
13	Resolución de triángulos rectángulos	***ELEMENTOS*** a) Suma de los ángulos de un triángulo (180º) b) Teorema de Pitágoras c) Definiciones de las razones trigonométricas.

RAZONES TRIGONOMÉTRICAS DE LOS

ÁNGULOS MÁS IMPORTANTES DEL PRIMER CUADRANTE

	Grados	**0º**	**30º**	**45º**	**60º**	**90º**
	Radianes	0 rad	A /6 rad	A /4 rad	A /3 rad	A /2 rad
$sen\alpha$		0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\cos\alpha$		1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
$tg\alpha$		0	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$	$\pm\infty$

RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS

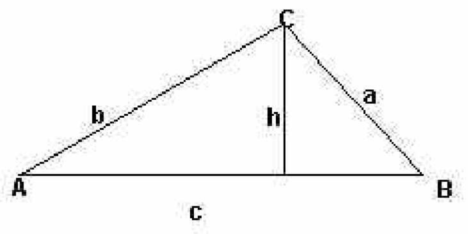
CUALESQUIERA

Núm	***Concepto***	***Observaciones***
Parte primera: **Identidades trigonométricas**		
1	Razones trigonométricas de la **suma de dos ángulos**	$sen(\alpha+\beta) = sen\alpha \cdot \cos\beta + \cos\alpha \cdot sen\beta$

		$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta-sen\alpha\cdot sen\beta$ $tg(\alpha+\beta)=\frac{tg\alpha+tg\beta}{1-tg\alpha\cdot tg\beta}$
2	Razones trigonométricas de la **diferencia de dos ángulos**	$sen(\alpha-\beta)=sen\alpha\cdot\cos\beta-\cos\alpha\cdot sen\beta$ $\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cdot\cos\beta+sen\alpha\cdot sen\beta$ $tg(\alpha-\beta)=\frac{tg\alpha-tg\beta}{1+tg\alpha\cdot tg\beta}$
3	Razones trigonométricas del **ángulo doble**	$sen(2\alpha)=2sen\alpha\cdot\cos\alpha$ $\cos(2\alpha)=\cos^2\alpha-sen^2\alpha$ $tg(2\alpha)=\frac{2tg\alpha}{1-tg^2\alpha}$
4	Razones trigonométricas del **ángulo mitad**[1]	$sen\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{2}}$ $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1+\cos\alpha}{2}}$ $tg\left(\frac{\alpha}{2}\right)=\pm\sqrt{\frac{1-\cos\alpha}{1+\cos\alpha}}$
5	Transformaciones de **sumas y diferencias en productos**	$sen\alpha+sen\beta=2\cdot sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $sen\alpha-sen\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha+\cos\beta=2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ $\cos\alpha-\cos\beta=-2\cdot sen\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot sen\frac{\alpha-\beta}{2}$
7	Transformaciones de **productos en sumas**	$sen\alpha\cdot sen\beta=\frac{1}{2}[sen(\alpha+\beta)+sen(\alpha-\beta)]$ $\cos\alpha\cdot\cos\beta=\frac{1}{2}[\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)]$
Parte II:		

TEOREMA DEL SENO

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL SENO



Como ya sabes por la definición de las razones trigonométricas:

h=bsenA, y h=asenB

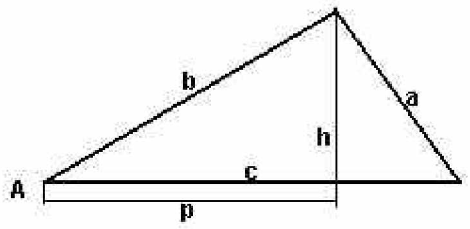
luego bsenA=asenB, de donde se obtiene una de las igualdades del teorema del seno:

$$\frac{a}{\operatorname{sen}A}=\frac{b}{\operatorname{sen}B}$$

La otra se obtiene igual considerando otra de las alturas del triángulo.

TEOREMA DEL COSENO

DEMOSTRACIÓN DEL TEOREMA DEL COSENO

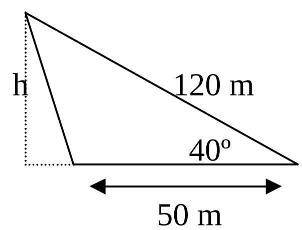


Observa que el triángulo ha quedado dividido en dos triángulos rectángulos.Por el teorema de Pitagoras se tiene que $a^2=(c-p)^2+h^2$ y $h^2=b^2-p^2$. Luego se obtiene $a^2=(c-p)^2+h^2=(c-p)^2+b^2-p^2=c^2+p^2-2pc+b^2-p^2=c^2+b^2-2pc$ y como p=bcosA tenemos el teorema

ACTIVIDADES

(1) ¿A qué altura estará volando un avión que es visto por dos observadores con una distancias de 500m entre ellos, si los ángulos de elevación son de 60º y 50º?

(2) Un agricultor quiere vender la parcela de la figura. ¿Cuánto obtendrá por ella sise la pagan a 50.000 ptas. el m^2?



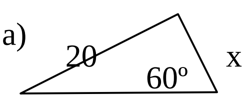
(3) El piloto de un avión observa un punto del terreno con un ángulo de depresión de 30º. Dieciocho segundos más tarde, el ángulo de depresión obtenido sobre el mismo punto es de 55º. Si vuela horizontalmente y a una velocidad de 400 millas/hora, halla la altitud del vuelo.

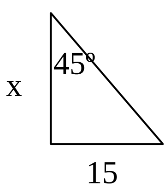
(4) La longitud de un hilo que sujeta una cometa es de 15 metros. Si el ángulo de elevación de la cometa es de 30º, ¿qué altura alcanza la cometa?

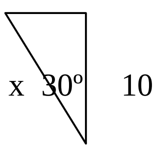
(5) Un avión vuela a 350m de altura, y el piloto observa que el ángulo de depresión de un aeropuerto próximo es de 15º. ¿Qué distancia le separa del mismo en ese instante?

(6) Dos poblaciones A y B, están situadas en una carretera que va del norte al sur. Otra población C, a 10 km en línea recta de la carretera anterior, está situada a 20º suroeste de A y a 30º suroeste de B. ¿Qué distancia separa a A de B?

1. Halla el valor del lado x en cada uno de los siguientes triángulos:

a)


b)


c)


2. Calcula los ángulos agudos que cumplen:

i.Sen ά = 1   ii.Tag ά = $\sqrt{3}$ iii.Cos ά = - 0’5

3. Completa la siguiente tabla:

Grados	105º		320º		35º
Radianes		4π/9		7π/15	

4. Determina las razones trigonométricas de los dos ángulos de un triángulo rectángulo cuya hipotenusa mide 3 cm y uno de sus catetos mide 1 cm.

5. Reduce al primer giro estos ángulos:

i.1930º ii.5350º iii.375º iv.999º

6. Indica, sin calcular su valor, el signo de las razones trigonométricas de los siguientes ángulos:

i.179º iv.-120º vi.7π/2 viii.4π/5
ii.342º v.3π/4 vii.3π/4
iii.-18º

7. Si cos ά =5/6 y ά es un ángulo agudo, calcula:

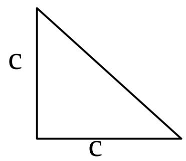
i.Sen (90º – ά) ii.Cos (180º - ά) iii.Cos (-ά) iv.Sen (90 + ά)

8. Si sen x = 1/5 y x pertenece al cuarto cuadrante, calcula cos x y tag x.

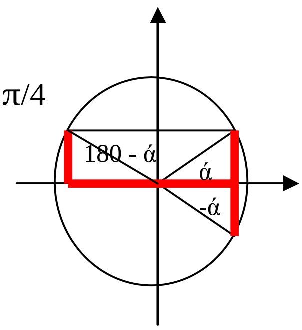
9. Si cos x = $\sqrt{2}$, ¿qué se puede asegurar del ángulo x?

10. Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles falsas. Razona tu respuesta.

i. Un ángulo de 720º es un ángulo de dos vueltas y, uno de 360º, es un ángulo de una vuelta.
ii. El ángulo de 1200º se puede expresar así: 1200º = 3 vueltas + 120º
iii. El seno de 1200º es igual al seno del ángulo de 120º
iv. El ángulo de 780º tiene el mismo seno que el ángulo de 60º (sen 780º = sen 60º)
v. El seno de 90º es igual a 1
vi. El coseno de 180º es igual a -1
vii. Del triángulo rectángulo isósceles de la figura se obtiene que tag 45º = 1



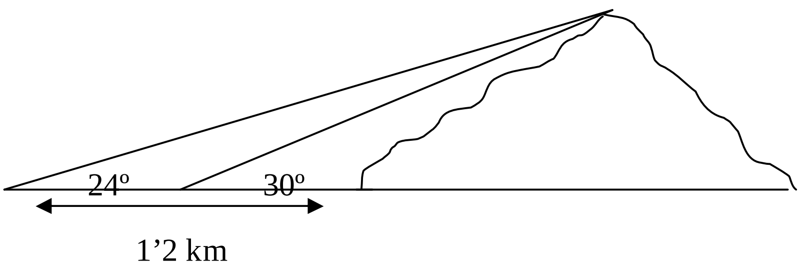
viii. El seno de un ángulo es siempre menor que 1.
ix. Si el sen ά = 1, el ángulo ά vale 1.
x. Si el seno de un ángulo agudo vale 3/5, entonces el coseno es 4/5.
xi. Si sen ά = 2/3, entonces cos ά = $\frac{\sqrt{5}}{3}$
xii. Como una circunferencia tiene 2π radianes, resulta que 360º = 2π radianes y 45º = π/4
xiii. La figura del margen indica que sen ά = sen (180º - ά)
xiv. La figura del margen indica que sen (-ά) = sen ά
xv. La figura del margen indica que cos (-ά) = - cosά



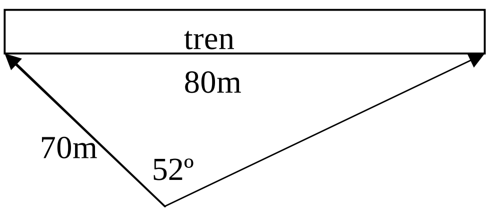
11. Si el arc sen ά = $\frac{\sqrt{2}}{2}$, entonces ά = 45º

12. Si la arc tag ά = 1, entonces ά = 55º

13. Para medir la altura de una montaña se obtuvieron las medidas de la figura adjunta. Si los dos puntos de observación están situados a 1200 metros sobre el nivel del mar, ¿qué altura alcanza la montaña?



14. Un observador está situado a 70 metros de la cabeza de un tren de 80 m de longitud. Si el ángulo que forman las visuales hacia la cabeza y la cola del tren es de 52º, ¿a qué distancia se encuentra la cola?



7 Razones trigonométricas de ángulos agudos

1. Calcula la medida, en grados y radianes, de cada uno de los siguientes ángulos:

a) El ángulo de un triángulo equilátero.

b) Los ángulos de un rombo, uno de los cuales mide 30°.

2. Utiliza la calculadora para hallar x en cada uno de los siguientes casos, determinando los ángulos agudos con una precisión de segundos y redondeando las razones angulares a las milésimas:

$$x = \tan 35° \ 10'; \ \cos x = 0{,}27; \ x = \text{sen } 75°; \ x = \cos \frac{\pi}{12}; \ \text{sen } x = 0{,}8; \ \tan x = 7{,}35$$

3. La hipotenusa de un triángulo rectángulo mide 13 cm, y uno de sus catetos, 12 cm. Halla las razones trigonométricas del ángulo opuesto al cateto menor y el área del triángulo. Haz un dibujo explicativo de los cálculos realizados.

4. Las rectas tangentes a una circunferencia desde un punto exterior, que dista del centro 50 m, forman un ángulo de 48°. Teniendo en cuenta que las rectas tangentes son perpendiculares a los radios en el punto de tangencia, halla el área del círculo. Haz un dibujo aproximado que te ayude en tus cálculos.

5. Calcula el valor de las razones desconocidas del ángulo agudo α en los siguientes casos:

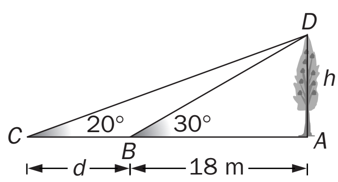
a) $\text{sen } \alpha = h = 0{,}8$ b) $\cos \alpha = h = \dfrac{1}{3}$ c) $\tan \alpha = h = \dfrac{4}{3}$

6. Si x es un ángulo agudo, simplifica todo lo que sea posible las siguientes expresiones:

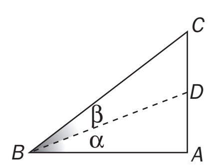
$$A = \frac{1 + \cos x}{1 - \text{sen } x} \cdot \frac{1 - \cos x}{1 + \text{sen } x} \qquad B = \frac{\cos^3 x}{\text{sen } x} - \frac{\text{sen}^3 x}{\cos x}$$

7. Las medidas, en metros, de las diagonales de un rombo son proporcionales a los números 6 y 8. Con esos datos, halla los dos ángulos del rombo. Haz un dibujo que te ayude a resolver el problema.

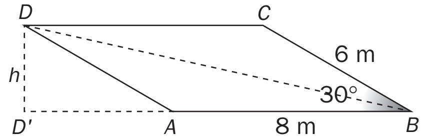
8. Se observa la copa, D, de un árbol desde un punto, B, del suelo, bajo un ángulo de 30°. El punto B dista 18 m del pie, A, del árbol. ¿Cuál es su altura? ¿A qué distancia d del punto B en la línea AB tendríamos que situarnos para observar su copa desde un punto C con un ángulo de 20°?



9. En la figura, el ángulo $\widehat{A}$ es de 90°, y los segmentos AD y DC tienen la misma medida. ¿Son iguales los ángulos α y β? Razona tu respuesta.



10. En el paralelogramo $ABCD$, calcula la medida de la diagonal BD y el área del paralelogramo.



SOLUCIONES

1. a) $\alpha = \dfrac{180^\circ}{3} = 60^\circ \Rightarrow \dfrac{x}{\pi} = \dfrac{\alpha}{180^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{60\pi}{180} = \dfrac{\pi}{3}$ rad

b) Si $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 150^\circ$. En radianes:

$$\begin{cases} \dfrac{x}{\pi} = \dfrac{\alpha}{180^\circ} \Rightarrow x = \dfrac{30\pi}{180} = \dfrac{\pi}{6} \text{ rad} \\ y = \pi - \dfrac{\pi}{6} = \dfrac{5\pi}{6} \text{ rad} \end{cases}$$

2. $x = \tan 35^\circ\ 10' = 0{,}705$

$\cos x = 0{,}27$; $x = 74^\circ\ 20'\ 9''$

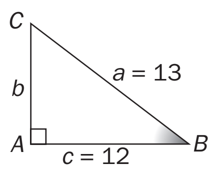
$x = \text{sen } 75^\circ = 0{,}966$

$x = \cos \dfrac{\pi}{12} = \cos 15^\circ = 0{,}966$

$\text{sen } x = 0{,}8$; $x = 53^\circ\ 7'\ 48''$

$\tan x = 7{,}35$; $x = 82^\circ\ 15'\ 8''$

3. En el triángulo ABC, rectángulo en A, por el teorema de Pitágoras, se tiene: $b = \sqrt{13^2 - 12^2} = 5$ cm. Se trata de hallar las razones del ángulo $\widehat{B}$.



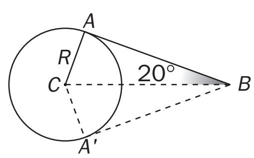
$\text{sen } B = \dfrac{b}{a} = \dfrac{5}{13}$

$\cos B = \dfrac{c}{a} = \dfrac{12}{13}$

$\tan B = \dfrac{b}{c} = \dfrac{5}{12}$.

Área: $S = \dfrac{1}{2} \cdot b \cdot c = \dfrac{1}{2} \cdot 5 \cdot 12 = 30 \text{ cm}^2$

4. Los triángulos ABC y $A'BC$ son iguales y rectángulos en A y A'.



En ABC se tiene:

$\text{sen } 24^\circ = \dfrac{CA}{CB}$; $0{,}41 = \dfrac{R}{50}$; $R = 20{,}50$ m

El área del círculo es: $S = \pi R^2$; $S = 1\,320 \text{ m}^2$

5. a) $\cos\alpha = \sqrt{1 - h^2} = \sqrt{1 - 0{,}64} = 0{,}6$

$\tan\alpha = \dfrac{h}{\sqrt{1 - h^2}} = \dfrac{0{,}8}{0{,}6} = 1{,}33$

b) $\text{sen }\alpha = \sqrt{1 - h^2} = \sqrt{1 - \dfrac{1}{9}} = 0{,}94$

$\tan\alpha = \dfrac{\sqrt{1 - h^2}}{h} = \dfrac{\sqrt{1 - \dfrac{1}{9}}}{\dfrac{1}{3}} = 2{,}83$

c) $\cos\alpha = \dfrac{1}{\sqrt{1 + h^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{1 + \dfrac{16}{9}}} = 0{,}6$

$\text{sen }\alpha = h \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + h^2}} = \dfrac{4}{3} \cdot \dfrac{1}{\sqrt{1 + \left(\dfrac{4}{3}\right)^2}} = 0{,}8$

6. $A = \dfrac{(1 + \cos x)(1 - \cos x)}{(1 - \text{sen } x)(1 + \text{sen } x)} = \dfrac{1 - \cos^2 x}{1 - \text{sen}^2 x} =$

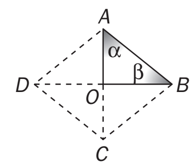
$= \dfrac{1 - (1 - \text{sen}^2 x)}{1 - \text{sen}^2 x} = \dfrac{\text{sen}^2 x}{\cos^2 x} = \tan^2 x$

$B = \dfrac{\cos^4 x - \text{sen}^4 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} =$

$= \dfrac{(\cos^2 x + \text{sen}^2 x)(\cos^2 x - \text{sen}^2 x)}{\text{sen } x \cdot \cos x} =$

$= \dfrac{\cos^2 x - \text{sen}^2 x}{\text{sen } x \cdot \cos x} = \dfrac{1}{\tan x} - \tan x$

7. $AC = 6k$ y $BD = 8k$. En el triángulo rectángulo OAB, se tiene:



$\tan\alpha = \dfrac{OB}{OA} = \dfrac{4k}{3k} = \dfrac{4}{3}$

$\alpha = 53^\circ\ 7'\ 48''$

Por tanto, $\beta = 90^\circ - \alpha = 36^\circ\ 52'\ 12''$

Los ángulos del rombo son, por tanto:

$\widehat{DAB} = 2\alpha = 106^\circ\ 15'\ 36''$

$\widehat{ABC} = 2\beta = 73^\circ\ 44'\ 24''$

8. En el triángulo rectángulo ABD se tiene:

$\tan 30^\circ = \dfrac{DA}{BA} = \dfrac{DA}{18}$

$DA = 10{,}39$ m, que es la altura del árbol.

En el triángulo ACD se tiene:

$\tan 20^\circ = \dfrac{DA}{CA} = \dfrac{10{,}39}{18 + d}$

$d = 10{,}55$ m, que es la distancia entre C y B.

9. No son iguales, para ello ponemos el siguiente ejemplo: $AB = 4$ y $AD = DC = 3$; se tiene:

En ABD: $\tan\alpha = \dfrac{AD}{AB} = \dfrac{3}{4} \Rightarrow \alpha \approx 36^\circ\ 52'\ 12''$

En ABC: $\tan(\alpha + \beta) = \dfrac{AC}{AB} = \dfrac{6}{4}$

$\alpha + \beta \approx 56^\circ\ 18'\ 36''$

Por tanto:

$\beta = (\alpha + \beta) - \alpha = 56^\circ\ 18'\ 36'' - 36^\circ\ 52'\ 12'' =$

$= 19^\circ\ 26'\ 24'' \neq \alpha$

10. En el triángulo $D'AD$:

$$\begin{cases} \text{sen } A = \dfrac{h}{6};\ h = 6 \cdot \text{sen } 30^\circ = 3 \text{ m} \\ \cos A = \dfrac{D'A}{6};\ D'A = 6 \cdot \cos 30^\circ = 5{,}20 \text{ m} \end{cases}$$

La diagonal mide $BD = \sqrt{h^2 + (8 + AD')^2} =$ $= 13{,}53$ m, y el área, $S = h \cdot AB = 24 \text{ m}^2$.

8 Razones trigonométricas de cualquier ángulo

1. Expresa los siguientes ángulos como suma de un número entero de vueltas y un ángulo menor que 360° ($2 \cdot \pi$):

$$-940° \qquad 3\,000° \qquad -27\pi \text{ rad} \qquad \frac{17\pi}{3} \text{ rad}$$

2. Indica en qué cuadrante están situados cada uno de los siguientes ángulos:

$$1\,780° \qquad -490° \qquad \frac{22\pi}{5} \text{ rad} \qquad -\frac{80\pi}{7} \text{ rad}$$

3. En una circunferencia de 20 m de radio, un arco mide 65 metros. Calcula en grados y radianes el ángulo central que le corresponde.

4. Dados los ángulos $\alpha = 78°$, $\beta = -260°$, $\gamma = 105°$, indica en qué cuadrante están situados los siguientes ángulos:

$$A = 5\alpha - 3\beta = 4\gamma \qquad\qquad B = \frac{3\alpha + \beta}{4} - \frac{\alpha - 2\gamma}{6}$$

5. Sin hacer uso de la calculadora, calcula el valor exacto de las expresiones:

$A = 3 \text{ sen } 270° + 4 \tan 135° - 2 \cos 300°$

$B = 2 \text{ sen } 315° - \tan 900° + 3 \cos 540°$

$C = \sqrt{2} \cdot \text{sen } 135° + \dfrac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 240° - \dfrac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 315°$

6. Sabiendo que α es un ángulo agudo, tal que $\cos \alpha = 0{,}6$, calcula las siguientes razones trigonométricas:

$$\cos (180° + \alpha) \qquad \text{sen } (180° - \alpha) \qquad \tan (90° - \alpha) \qquad \text{sen } (900° - \alpha)$$

7. Con ayuda de la calculadora y utilizando el modo angular en grados, halla, con tres cifras decimales significativas, los valores de las siguientes razones trigonométricas:

$$\cos 385° \qquad \tan \frac{18\pi}{7} \qquad \text{sen } (-2\,050°) \qquad \cos \frac{13\pi}{3}$$

8. Calcula el valor del seno y el coseno de un ángulo del cuarto cuadrante cuya tangente vale $-\frac{3}{4}$. Expresa las soluciones en forma fraccionaria.

9. Halla, sin hacer uso de la calculadora, qué ángulos de la circunferencia goniométrica cumplen las siguientes condiciones:

a) Su seno vale $-\dfrac{1}{2}$ b) Su coseno vale $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ c) Su tangente vale -1

10. Halla los ángulos x tales que $0° \leqslant x < 360°$, si verifican las igualdades siguientes:

a) $\text{sen } (2x + 60°) = -\dfrac{1}{2}$ b) $\tan \dfrac{5x - 40°}{2} = -1$

SOLUCIONES

1. $-940° = -2 \cdot 360° - 220° = -3 \cdot 360° + 140°$
$-27\pi = -13 \cdot 2\pi - \pi = -14 \cdot 2\pi + \pi$

$3\,000° = 8 \cdot 360° + 120°$

$\frac{17\pi}{3} = 2 \cdot 2\pi + \frac{5\pi}{3}$

2. $1\,780° = 4 \cdot 360° + 340°$. Está situado en el tercer cuadrante.

$-4\,900° = -13 \cdot 360° - 220° = -14 \cdot 360° + 140°$. Está situado en el segundo cuadrante.

$\frac{22\pi}{5} = 2 \cdot 2\pi + \frac{2\pi}{5}$. Está situado en el primer cuadrante.

$-\frac{80\pi}{7} = -5 \cdot 2\pi - \frac{10\pi}{7} = -6 \cdot 2\pi + \frac{4\pi}{7}$. Está situado en el segundo cuadrante.

3. El ángulo en grados es:

$\alpha = 360° \cdot \frac{L_{arco}}{L_{circunf}} = 360° \cdot \frac{65}{40\pi}$; $\alpha = 186°\ 12'\ 41''$

El ángulo en radianes es:

$\alpha = 2\pi \cdot \frac{L_{arco}}{L_{circunf}} = 2\pi \cdot \frac{65}{40\pi}$; $\alpha = 3{,}25$ rad

4. $A = 5\alpha - 3\beta - 4\gamma = 5 \cdot 78° - 3 \cdot (-260°) - 4 \cdot 105° = 750° = 2 \cdot 360° + 30°$
Es del primer cuadrante.

$B = \frac{3\alpha + \beta}{4} - \frac{\alpha - 2\gamma}{6} = \frac{7\alpha + 3\beta + 2\gamma}{12} =$
$= \frac{7 \cdot 78° + 3 \cdot (-260°) + 2 \cdot 105°}{12} = -2°$

Es del cuarto cuadrante.

5. $A = 3 \text{ sen } 270° + 4 \tan 135° - 2 \cos 300° =$
$= 3 \cdot (-1) + 4 \cdot (-1) - 2 \cdot \frac{1}{2} = -8$

$\left.\begin{array}{l} 900° = 2 \cdot 360° + 180° \\ 1\,125° = 3 \cdot 360° + \ \ 45° \end{array}\right\}$

$B = 2 \text{ sen } 315° - \tan 900° + 3 \cos 540° =$
$= 2 \text{ sen } 315° - \tan 180° + 3 \cos\ \ 45° =$
$= 2 \cdot \frac{-\sqrt{2}}{2} - 0 + 3 \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}$

$C = \sqrt{2} \cdot \text{sen } 135° + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \tan 240° - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \cos 315° =$
$= \sqrt{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{2\sqrt{3}}{3} \cdot \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{7}{6}$

6. Aplicando la relación fundamental, se tiene:
$\text{sen}^2\,\alpha + \cos^2\alpha = 1$; $\text{sen }\alpha = \sqrt{1 - 0{,}64^2} = 0{,}6$

$\cos(180° + \alpha) = -\cos\alpha = -0{,}64$

$\tan(90° - \alpha) = \frac{\text{sen }(90° - \alpha)}{\cos(90° - \alpha)} = \frac{\cos\alpha}{\text{sen }\alpha} = \frac{0{,}8}{0{,}6} = \frac{4}{3}$

$\text{sen }(180° - \alpha) = \text{sen }\alpha = 0{,}6$

$\text{sen }(900° - \alpha) = \text{sen }(2 \cdot 360° + 180° - \alpha) =$
$= \text{sen }(180° - \alpha) = 0{,}6$

7. $\cos 385° = 0{,}906$; $\tan\frac{18\pi}{7} = \tan\frac{3\,240°}{7} = -4{,}381$

$\text{sen }(-2\,050°) = 0{,}940$; $\cos\frac{13\pi}{3} = \cos 780° = 0{,}5$

8. De la relación $\cos^2\alpha = \frac{1}{1 + \tan^2\alpha}$ se tiene:

$\cos\alpha = \sqrt{\frac{1}{1 + \frac{9}{16}}} = \frac{4}{5}$

De la definición de tangente $\tan\alpha = \frac{\text{sen }\alpha}{\cos\alpha}$:

$\text{sen }\alpha = \tan\alpha \cdot \cos\alpha = -\frac{3}{4} \cdot \frac{4}{5} = -\frac{3}{5}$

9. a) De $\text{sen } 30° = \frac{1}{2}$, si $\text{sen }\alpha = -\frac{1}{2}$,

$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 180° - 30° = 150° \\ \alpha = 180° + 30° = 210° \end{array}\right.$

b) De $\cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$, si $\cos\alpha = -\frac{\sqrt{3}}{2}$,

$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 30° \\ \alpha = 360° - 30° = 330° \end{array}\right.$

c) De $\tan 45° = 1$, si $\tan\alpha = -1$,

$\left\{\begin{array}{l} \alpha = 180 - 45° = 135° \\ \alpha = 360° - 45° = 315° \end{array}\right.$

10. a) $\text{sen }(2x + 60°) = -\frac{1}{2}$

$\left\{\begin{array}{l} 2x + 60° = 210°;\ x = \ \ 75° \\ 2x + 60° = 300°;\ x = 120° \end{array}\right.$

b) $\tan\frac{5x - 40°}{2} = -1$

$\left\{\begin{array}{l} \frac{5x - 40°}{2} = 135°;\ x = \ \ 62° \\ \frac{5x - 40°}{2} = 315°;\ x = 134° \end{array}\right.$

Trigonometría
Ejercicios de refuerzo

1.- Determina las razones trigonométricas de los siguientes ángulos, relacionándolos con algunos ángulos notables (0º, 30º, 45º, 60º, 90º, 180º, 270º, 360º), indicando en qué cuadrante se encuentran:
a) 240º b) 135º c) 315º d) 720º e) 750º

2.- Calcula el valor de los siguientes ángulos y el resto de las razones trigonométricas, sabiendo que:
a) sen $\alpha = -\sqrt{2}/2$ y $\alpha \in$ III cuadrante
b) con $\alpha = -1/2$ y $\alpha \in$ II cuadrante
c) tag $\alpha = 1$ y $\alpha \in$ IV cuadrante

3.- Calcula el seno y la tangente de un ángulo agudo, sabiendo que su coseno vale:
a) 0,5541 b) 0.1852 c) 0,9457 d) 0,5

4.- Calcula el coseno y la tangente de un ángulo agudo, sabiendo que su seno vale:

$a)\ \frac{3}{5} \qquad b)\ \frac{1}{6} \qquad c)\ \frac{4}{7} \qquad d)\ \frac{3}{4}$

Expresa los resultados en forma de fracción.

5.- Calcula el seno y la tangente de un ángulo agudo, sabiendo que su coseno vale:

$a)\ \frac{\sqrt{2}}{3} \qquad b)\ \frac{\sqrt{5}}{4} \qquad c)\ \frac{\sqrt{3}}{5} \qquad d)\ \frac{\sqrt{7}}{5}$

Expresa los resultados en forma de expresiones racionales.

Tercera relación fundamental:

Al **dividir** los dos miembros de la **primera relación fundamental** por **cos^2** α :

$$\frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{\cos^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} \Rightarrow \tan^2\alpha + 1 = \frac{1}{\cos^2\alpha}$$

A este resultado se le conoce como “Tercera relación fundamental de la Trigonometría y sirve para relacionarnos la tangente con el coseno de un ángulo.

Cuarta relación fundamental

Al **dividir** los dos miembros de la **primera relación fundamental** por **sen^2** α :

$$\frac{sen^2\alpha + \cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \Rightarrow \frac{sen^2\alpha}{sen^2\alpha} + \frac{\cos^2\alpha}{sen^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\tan^2\alpha} = \frac{1}{sen^2\alpha}$$

A este resultado se le conoce como “Cuarta relación fundamental de la Trigonometría” y sirve para relacionarnos la tangente con el seno de un ángulo.

A la luz de estos resultados, realiza las actividades siguientes.

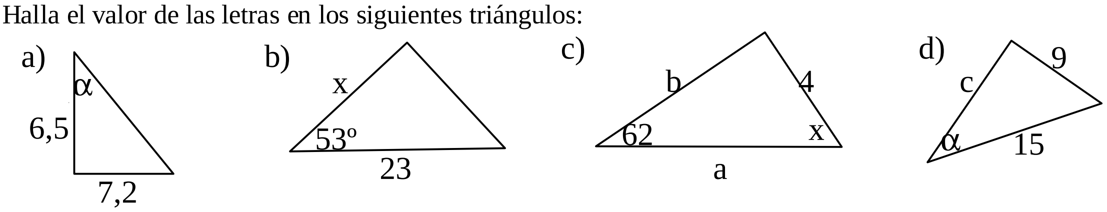
6.- Calcula senα y cosα , sabiendo que la tangente de α vale:
a) 0,7563 b) 1,3852 c) 8,3756 d) 5432

7.- La tangente de un ángulo agudo α vale $\frac{3}{2}$. Calcula senα y cosα expresando los resultados mediante fracciones y radicales.

8.- La tangente de un ángulo agudo α vale $\sqrt{2}$. Calcula el senα y cosα dando los resultados mediante expresiones radicales.

9.- Si α es un ángulo agudo y sen$\alpha = \frac{3}{5}$, calcula el valor de la expresión 5senα + cosα - 16tanα

10.- Halla el valor de las letras en los siguientes triángulos:



11.- La altura de los ojos de un observador es de 1,60 m. El observador ve el punto más alto de un poste con un ángulo de elevación de 33º. La distancia entre los pies del observador y el pie del poste es de 6 metros. Calcula la altura del poste.

12.- Desde un punto del suelo se ve la altura de una torre con un ángulo de elevación de 48º. Si se retrocede 30m, se ve la misma torre pero bajo un ángulo de 24º. Calcula la altura de la torre.

13.- Desde la orilla de un río se ve un árbol en la otra orilla bajo un ángulo de 40º, y si se retrocede 4m se ve bajo un ángulo de 28º. Calcula la altura del árbol y la anchura del río.

14.- Dos observadores situados a 70 metros de distancia ven un globo situado entre ellos y en el mismo plano vertical bajo ángulos de elevación de 25º y 70º. Halla la altura del globo y las distancias que los separan de cada uno de los dos observadores.
15.- La diagonal de un rectángulo mide 7cm y forma con uno de los lados un ángulo de 39º. Calcula la medida de los lados del rectángulo, así como su área.
16.- Calcula el área de un rombo sabiendo que uno de sus ángulos es de 45º y que su lado mide 2m.
17.- Indica el cuadrante al que pertenece cada uno de los siguientes ángulos expresados en grados:
a) 320º b) 125º c) 200º d) 15º e) 516º f) 765º g) 1295º h) 2150º
18.- Indica el cuadrante al que pertenece cada uno de estos ángulos expresados en radicales:

$$a)\frac{7\pi}{4}rad \quad b)\frac{7\pi}{6}rad \quad c)\frac{2\pi}{3}rad \quad d)\frac{\pi}{11}rad \quad e)\frac{11\pi}{4}rad \quad f)\frac{16\pi}{3}rad \quad g)\frac{49\pi}{6}rad \quad h)\frac{38\pi}{5}rad$$

19.- El coseno de un ángulo del cuarto cuadrante vale $\frac{28}{53}$. Calcula el seno y la tangente de ese mismo ángulo.

20.- La tangente de un ángulo del tercer cuadrante vale $\frac{77}{36}$. Calcula el seno y el coseno de ese mismo ángulo.

21.- Responde a las siguientes preguntas y razones la respuesta:

a) ¿Puede el coseno de un ángulo del segundo cuadrante valer $\frac{1}{2}$?
b) ¿Puede el seno de un ángulo del segundo cuadrante valer $\frac{13}{12}$?
c) ¿Puede la tangente de un ángulo del tercer cuadrante valer $\frac{13}{12}$?
d) ¿Puede la tangente de un ángulo del cuarto cuadrante valer $\frac{13}{12}$?
e) ¿Puede el seno de un ángulo del segundo cuadrante valer $\frac{1}{2}$?

22.- El seno de un ángulo del tercer cuadrante vale $-\frac{7}{25}$. Calcula el coseno y la tangente de ese mismo ángulo.

23.- La tangente de un ángulo del segundo cuadrante vale $-\frac{3}{10}$. Calcula el seno y el coseno de ese mismo ángulo.

24.- El coseno de un ángulo del cuarto cuadrante vale $\frac{\sqrt{5}}{5}$. Calcula el seno y la tangente del mismo ángulo.

25.- Sin ayuda de la calculadora, indica los valores de las siguientes razones trigonométricas:
a) sen 150º b) con (-330) c) tan 315º d) sen 225º e) tan(-315º) f) tan 150º
g) sen 300º h) cos 135º i) tan 1305º j) sen (-210º) k) cos 210º l) tan 300º
26.- Indica la medida de todos los ángulos x tales que se verifique que:

$$a) sen x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad b) \cos x = 0 \qquad c) \tan x = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

27.- Indica la medida de todos los ángulos x menores que 360º tales que se verifique que:

$$a) sen\, x = -1 \qquad b) \cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \qquad c) \tan x = -\frac{\sqrt{3}}{3}$$

28.- Sin ayuda de la calculadora, halla el valor de las siguientes razones trigonométricas:

$$a) sen 315^\circ \quad b) \tan 960^\circ \quad c) \cos\frac{5\pi}{2}rad \quad d) \cos 120^\circ \quad e) sen\frac{3\pi}{4}rad \quad f) \tan\frac{13\pi}{3}rad$$

29.- Expresa las razones trigonométricas de 70º, 160º, 200º y 340º en función de las de 20º.
30.- Expresa las razones trigonométricas de 33º en función de las de -33º.
31.- Indica cuáles de las siguientes afirmaciones son verdaderas y cuáles son falsas. Razona tu respuesta.
a) Un ángulo de 720º es un ángulo de dos vueltas y, uno de 360º, es un ángulo de una vuelta.
b) El ángulo de 1200º se puede expresar así: 1200º = 3 vueltas + 120º
c) El seno de 1200º es igual al seno del ángulo de 120º
d) El ángulo de 780º tiene el mismo seno que el ángulo de 60º
e) El seno de 90º es igual a 1
f) El coseno de 180º es igual a -1
g) Del triángulo rectángulo isósceles de la figura se obtiene que tan 45º = 1
h) El seno de un ángulo es siempre menor que 1
i) Si sen α =1, el ángulo α vale 90º