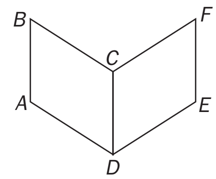
9 Vectores y coordenadas en el plano

1. En un sistema de coordenadas, dibuja 4 vectores, de coordenadas $\overrightarrow{MA} = (2, 3)$, $\overrightarrow{MB} = (-1, 4)$, $\overrightarrow{MC} = (-4, 3)$, $\overrightarrow{MD} = (-2, -1)$.

a) Calcula las coordenadas de los extremos de los vectores, si las coordenadas de M son $(1, 2)$.

b) Averigua si los puntos A, B, C y D forman un paralelogramo.

2. De los seis puntos de la figura, se conocen las coordenadas de cuatro de ellos: $A(2, 4)$, $B(5, 2)$, $C(7, 8)$ y $E(4, 5)$. Se sabe además que los puntos forman dos paralelogramos $ABCD$ y $DCFE$ con un lado común CD. Halla las coordenadas de los puntos D y F. Razona por qué los puntos $ABFE$ forman también un paralelogramo.



3. Considera el vector $\vec{v} = (-3, 4)$ y el punto $M(5, -3)$. Calcula las coordenadas del punto P en cada uno de los siguientes casos:

a) Cuando el punto M es el origen del vector y P su extremo.

b) Cuando el punto P es el origen del vector y M su extremo.

4. Dados los vectores $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (1, 2)$, $\vec{c} = (-3, 5)$, calcula las coordenadas de los siguientes vectores:

$\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c}$ $\qquad$ $\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c}$ $\qquad$ $\vec{p} = 2(\vec{a} - \vec{c}) - 3(\vec{a} + \vec{b} - \vec{c})$

5. Calcula las coordenadas de dos vectores $\vec{a}$ y $\vec{b}$, sabiendo que su suma es el vector $\vec{s} = (1, 3)$ y su diferencia es el vector $\vec{d} = (1, 3)$. ¿Cuál de los dos vectores tienen mayor módulo?

6. Considera un segmento del plano de extremos los puntos A y B, tal que M es punto medio del mismo. Determina las coordenadas del punto desconocido en los casos siguientes:

a) Cuando se conocen las coordenadas de los extremos $A(4, 6)$ y $B(-2, 4)$.

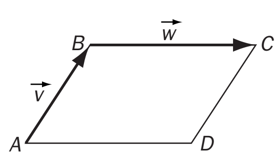
b) Cuando se conocen un extremo $A(3, -6)$ y el punto medio del segmento $M(-2, 1)$.

7. Dados los vectores $\vec{a} = (2, -3)$, $\vec{b} = (1, 2)$, $\vec{c} = (-3, 5)$, resuelve, cuando sea posible, las siguientes ecuaciones vectoriales:

a) $2\vec{a} - 3\vec{x} = 4\vec{b}$ siendo $\vec{x}$ el vector incógnita.

b) $2\vec{a} + x\vec{b} = \vec{c}$ siendo, en este caso, x el número incógnita.

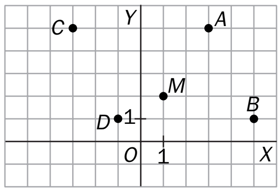
8. En el paralelogramo $ABCD$ de la figura se conocen los vectores $\overrightarrow{AB} = \vec{v}$ y $\overrightarrow{BC} = \vec{w}$. Si $\vec{v} = \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right)$ y $\vec{w} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right)$, calcula cuánto miden las diagonales del paralelogramo.



9. Los puntos $A(-1, -4)$, $B(3, 1)$ y $C(-2, 5)$ son los vértices de un triángulo. Calcula su perímetro y di si es equilátero, isósceles o escaleno. ¿Se trata de un triángulo rectángulo?

SOLUCIONES

1. a)



$\overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OM} + (2, 3) = (1, 2) + (2, 3)$
$A(3, 5)$
$\overrightarrow{OB} = \overrightarrow{OM} + (-1, 4) = (1, 2) + (4, -1)$
$B(5, 1)$
$\overrightarrow{OC} = \overrightarrow{OM} + (-4, 3) = (1, 2) + (-4, 3)$
$C(-3, 5)$
$\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OM} + (-2, -1) = (1, 2) + (-2, -1)$
$D(-1, 1)$

b) $ABDC$ es un paralelogramo, dado que se verifica $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (2, -4) = \overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OC} = \overrightarrow{CD}$

2. En $ABCD$ se tiene $\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{BC}$; $\overrightarrow{OD} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$; $\overrightarrow{OD} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}$; $D = (4, 10)$.

En $DCFE$ se tiene $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{DC}$; $\overrightarrow{OF} - \overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$; $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{OE} + \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OD}$; $F = (7, 3)$.

En $ABCD$ se tiene $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ y en $DCFE$ se tiene $\overrightarrow{DC} = \overrightarrow{EF}$; por tanto, $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$, por lo que $ABEF$ es un paralelogramo.

3. a) $\overrightarrow{MP} = \vec{v}$; $\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OM} = \vec{v}$
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} + \vec{v} = (5, -3) + (-3, 4)$; $P(2, 1)$

b) $\overrightarrow{PM} = \vec{v}$; $\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OP} = \vec{v}$
$\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OM} - \vec{v} = (5, -3) - (-3, 4)$; $P(8, -7)$

4. $\vec{m} = \vec{a} - \vec{b} + \vec{c} =$
$= (2, -3) + (-1, -2) + (-3, 5) = (-2, 0)$

$\vec{n} = 2\vec{a} + \vec{b} - 3\vec{c} =$
$= (4, -6) + (1, 2) + (9, -15) = (14, -19)$

$\vec{p} = 2\vec{a} - 2\vec{c} - 3\vec{a} - 3\vec{b} + 3\vec{c} = -\vec{a} - 3\vec{b} + \vec{c} =$
$= (-2, 3) + (-3, -6) + (-3, 5) = (-8, 2)$

5. Los vectores verifican el sistema

$$\left.\begin{array}{l} \vec{a} + \vec{b} = \vec{s} \\ \vec{a} - \vec{b} = \vec{d} \end{array}\right\} 2\vec{a} = \vec{s} + \vec{d};\ \vec{a} = \frac{1}{2}(\vec{s} + \vec{d}) =$$

$$= \frac{1}{2}[(1, 3) + (5, -1)];\ \vec{a} = (3, 1)$$

De la 1.ª ecuación se tiene:
$\vec{b} = \vec{s} - \vec{a} = (1, 3) - (3, 1)$; $\vec{b} = (-2, 2)$

Los módulos valen $|\vec{a}| = \sqrt{3^2 + 1^2} = \sqrt{10}$ y $|\vec{b}| = \sqrt{(-2)^2 + 2^2} = \sqrt{8}$, el vector de mayor módulo es $\vec{a}$.

6. a) $\overrightarrow{OM} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{2}[(4, 6) + (-2, 4)] =$

$= \frac{1}{2}(2, 10)$; $M(1, 5)$

b) $\overrightarrow{OB} = 2\overrightarrow{OM} - \overrightarrow{OA} = (-4, 2) + (-3, 6)$;
$B(-7, 8)$

7. a) $2\vec{a} - 3\vec{x} = 4\vec{b}$; $\vec{x} = \frac{1}{3}(2\vec{a} - 4\vec{b}) =$

$= \frac{1}{3}[(4, -6) + (-4, -8)]$; $\vec{x} = \left(0, -\frac{14}{3}\right)$

b) $2\vec{a} + x\vec{b} = \vec{c}$; $(4, -6) + (x, 2x) = (-3, 5)$;

$$(4 + x, -6 + 2x) = (-3, 5) \left\{\begin{array}{r} 4 + x = 3 \\ -6 + 2x = 5 \end{array}\right\}$$

No tiene solución.

8. Las diagonales del paralelogramo son los vectores $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{AC}$.

$\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \vec{v} + \vec{w} =$

$= \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) + \left(-\frac{1}{2}, \frac{15}{2}\right)$; $\overrightarrow{AC} = (-5, 12)$, cuya medida es $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$ u.

$\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{AD} - \overrightarrow{AB} = \vec{v} - \vec{w} =$

$= \left(-\frac{9}{2}, \frac{9}{2}\right) + \left(\frac{1}{2}, -\frac{15}{2}\right)$; $\overrightarrow{BD} = (-4, -3)$, cuya medida es $|\overrightarrow{BD}| = \sqrt{(-4)^2 + (-3)^2} = 5$ u.

9. El perímetro del triángulo viene dado por $p = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BC}| + |\overrightarrow{CA}|$ siendo:

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = (3, 1) - (-1, -4) = (4, 5)$
$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{16 + 25} = \sqrt{41}$

$\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB} = (-2, 5) - (3, 1) = (-5, 4)$
$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{25 + 16} = \sqrt{41}$

$\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{OA} - \overrightarrow{OC} = (-1, -4) - (-2, 5) = (1, -9)$
$|\overrightarrow{CA}| = \sqrt{1 + 81} = \sqrt{82}$

Por tanto, $p = 2\sqrt{41} + \sqrt{82} = 21{,}86$ u

El triángulo es isósceles y rectángulo, ya que
$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{BC}|$ y $|\overrightarrow{CA}|^2 = 82 = 41 + 41 =$
$= |\overrightarrow{AB}|^2 + |\overrightarrow{BC}|^2$

Vectores

Este tema pretende ser una introducción en el concepto de vectores para los alumnos de 4º de la ESO. Para ello se realizan estos apuntes con ejercicios que se irán explicando en el aula para su mayor comprensión.

Introducción: Los Vectores como Extensión de los Números

El concepto de los números se desarrolló gradualmente. Primero fueron los enteros positivos, 1,2,3... (no el cero, que se incorporó más recientemente) los usados para reseñar los objetos contables, tales como ovejas, días, miembros de la tribu, etc.

El concepto de números negativos pudo surgir como una extensión de la resta, ó, quizás del dinero, lo que se debe es riqueza negativa, números rojos en la contabilidad.

Los objetos que pueden dividirse, por ejemplo el suelo, trajeron las fracciones. Luego, alrededor del año 500 a.C., un estudiante de Pitágoras probó que el número dado por la raíz cuadrada de 2 no se podía expresar como fracción; no lo encontró lógico y, por lo tanto, podemos decir que esos son números "irracionales". Por medio de ellos, enteros, fracciones e irracionales podemos describir cualquier cosa que tenga una dimensión, una magnitud.

Pero,¿ como podemos describir la velocidad, que tiene una magnitud y una dirección?

Para eso está el vector.

Vectores: Definición.

Para definir los vectores utilizaremos una primera clasificación haciendo la distinción entre vectores fijos y vectores libres.

VECTORES FIJOS

Un *vector fijo* del plano es un segmento cuyos extremos están dados en un cierto orden (se suele decir que es un segmento orientado). Se representa por $\overrightarrow{AB}$, siendo los extremos *A* y *B*

Se considera como caso singular el vector fijo definido por un segmento cuyos extremos coinciden. En este caso el vector fijo se reduce a un solo punto.

Los puntos en los que empieza y termina un vector se llaman *origen* y *extremo*, respectivamente.

Módulo, dirección y sentido de un vector fijo:

- En un vector fijo se llama *módulo* del mismo a la longitud del segmento que lo define. El módulo de un vector fijo $\overrightarrow{AB}$ se representa por $|\overrightarrow{AB}|$ y se leerá «módulo de $\overrightarrow{AB}$ ».
- La *dirección* de un vector fijo viene dada por la recta sobre la que podemos dibujar dicho vector, es decir depende de la inclinación o “pendiente” de dicha recta. Se dice que un vector fijo tiene la misma *dirección* que otro si los segmentos que los definen pertenecen a rectas paralelas.
- El *sentido* de un vector fijo viene dado por la posición en la que se encuentre la flecha que nos indica hacia donde va dicho vector. Dados dos vectores fijos $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ del plano que tengan la misma dirección, se dice que tienen el mismo *sentido* si los segmentos $\overrightarrow{AD}$ y $\overrightarrow{BC}$ (los segmentos que unen el origen de cada uno con el extremo del otro) tienen un punto en común. En otro caso se dice que los dos vectores tienen sentido contrario o sentido opuesto.

Vectores equipolentes:

Se dice que dos *vectores* son *equipolentes* si tienen el mismo módulo, la misma dirección y el mismo sentido.

Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{CD}$ son equipolentes, el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo.

VECTORES LIBRES DEL PLANO

Un *vector libre* es el conjunto de todos los vectores fijos del plano que son equipolentes a uno dado. Como todos los vectores fijos del plano consistentes en un solo punto son equipolentes, definen un único vector libre, que recibirá el nombre de vector cero, $\vec{0}$.

Representantes de un vector libre:

A uno cualquiera de los vectores que constituyen un vector libre se le denomina *representante del vector libre*. Para representar un vector libre se escribe uno cualquiera de sus representantes, o bien se escribe una letra con una flecha encima, $\vec{a}$.

Resultado fundamental:

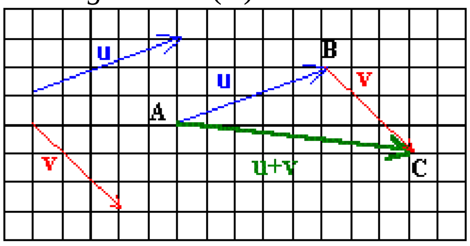
Dados un punto *P* y un vector libre del plano, $\vec{a}$, existe un único representante de $\vec{a}$ con origen en *P*. Igualmente se puede encontrar un único representante de $\vec{a}$ con extremo en el punto *P*.

Vectores: Suma y resta.

Lee detenidamente:

Hacemos $u + v$.

- A partir del punto A, ponemos el *origen* de u
- En el *extremo* de u , o sea en B, ponemos el *origen* de v , hasta llagar a C
  Uniendo el *origen* de u (A) con el *extremo* de v (C) se obtiene el vector $u + v$ = AC



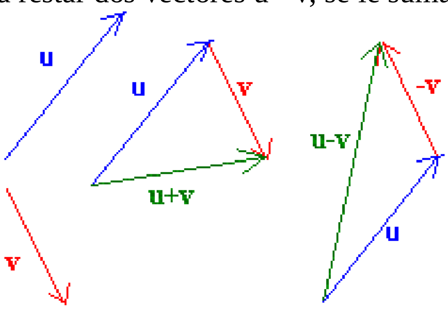
Mediante pares de números es más sencillo aún:

$u + v$ = (5,2) +(3,-3) = (5+3,2-3) = (8,-1)

Ya hemos visto que para sumar dos vectores u y v, se sitúa *v a continuación de u*, de manera que el *origen* de v coincida con el *extremo* de u.

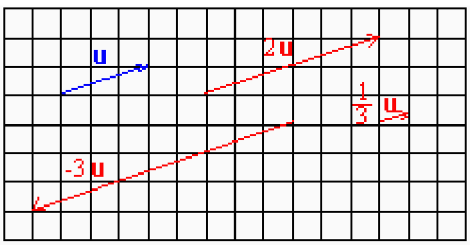
La suma u + v, es el vector cuyo *origen* es el de u y *extremo* el de v.

Para restar dos vectores u - v, se le suma a u el *opuesto* de v : u - v = u + (-v)



Vectores: Multiplicación por un número.

- La flecha designada por u es un vector
- El vector 2u tiene la misma dirección y el mismo sentido que u y es doble de largo, o sea su módulo es el doble.
- Análogamente se forman los vectores $\frac{1}{3}$u y -3u (éste está dirigido en sentido contrario a u)



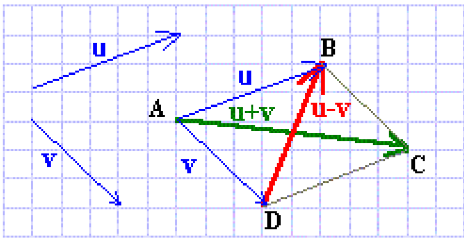
- El vector u avanza 3 y sube 1. Por eso lo designamos así: u (3,1). Al par (3,1) se le llama componentes del vector u .

- Análogamente
  - o $2u = (6,2)$. Es decir, $2u = 2(3,1) = (6,2)$
  - o $-3u = (-9,3)$ retrocede 9 y baja 3
  - o $\frac{1}{3}u = (1, \frac{1}{3})$

<u>Vectores: Suma y Resta de vectores en un paralelogramo.</u>

Si colocamos u y v con origen común y completamos un paralelogramo:

- La diagonal cuyo *origen* es el de u y v es el vector suma, u+v .



- La diagonal que va del *extremo* de v al *extremo* de u es u-v

Para entenderlo mejor recuerda el primer método de sumar vectores y la igualdad de vectores:
u+v = AB + BC = AC = u+v
u-v = u+(-v) = DC + CB = DB = u-v

<u>Vectores: Coordenadas de un vector.</u>

a) Cualquier vector v se puede poner como combinación lineal (C.L.) de otros dos x e y de distinta dirección.

v = ax + by

Siendo a y b números.

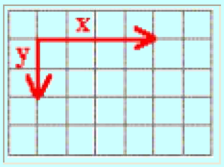
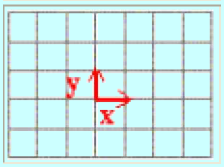
b) Esta C.L. es ÚNICA. Es decir, dados x, y y v, sólo existen un par de números a y b que cumplen la igualdad anterior.

c) Observa también que los propios vectores x e y se pueden poner como C.L. de ellos mismos:

x = 1.x + 0.y	y = 0.x + 1.y

d) Dos vectores x, y, con distinta dirección, forman una *base*, pues cualquier vector del plano se puede poner como C.L. de ellos.

e) Si los vectores de la *base* son perpendiculares entre sí, se dice que forman una base *ortogonal* y si, además, tienen módulo 1, se dice que forman una base *ortonormal*.

	Base ORTOGONAL	x y
	Base ORTONORMAL	x y |x| = 1 |y| = 1

f) Cualquier vector del plano, v, se puede poner como C.L. de los elementos de una base B(x,y) de forma única: v = ax + by. A los números (a,b) se les llama *coordenadas* de v respecto de B, y se expresa así: v(a,b) o bien v = (a,b).

<u>Vectores: Operaciones con coordenadas .</u>

SUMA: Comprueba en la siguiente escena como se *suman* las coordenadas de los vectores respecto de la base ortonormal B(x,y)

$u = (-2,3)$
$v = (5,2)$
$u + v = (-2+5,3+2) = (3,5)$

Vectores: Producto escalar de dos vectores

$u \cdot v = \|u\| \cdot \|v\| \cdot \cos(u,v)$	Producto de sus módulos por el coseno del ángulo que forman

¡Atención! |u|, |v| y cos(u,v) son números. El producto u.v es un número. De ahí le viene el nombre, pues *escalar* significa *número*. O sea el resultado del producto escalar de dos vectores NO ES UN VECTOR, ES UN NÚMERO.

NOTA: A partir de ahora vamos a considerar siempre que las coordenadas de todos los vectores están referidas a la base ortonormal B(x,y), siendo las componentes de x(1,0) y las de y(0,1)

Vectores: Propiedades del producto escalar .

1.- Comprueba que si u=0 o v=0, u.v=0

2.- Comprueba que si u es *perpendicular* a v, u.v=0, siendo $u \neq 0$ y $v \neq 0$, pues entonces A=90º, y el cos90º=0

3.- Propiedad conmutativa: u.v = v.u

4.- Propiedad asociativa: a(u.v) = (au).v (a = número, u = vector, v = vector)

5.- En una base ortonormal B(x,y) o sea x=(1,0) y=(0,1) se cumple

x.x = 1	Para comprobarlo pones en la escena anterior u = x = (1,0) v = x = (1,0)
y.y = 1	Para comprobarlo pones en la escena anterior u = y = (0,1) v = y = (0,1)
x.y = y.x = 0	Para comprobarlo pones en la escena anterior u = x = (1,0) v = y = (1,0)

6.- Propiedad distributiva: $u. (v + w) = u.v + u.w$

Vectores: Expresión analítica del producto escalar.

Si las coordenadas de los vectores u y v respecto a una *base ortonormal* son:

$u\,(u_1,u_2) \qquad v(v_1,v_2)$

el producto escalar queda así: $u.v = u_1.v_1 + u_2.v_2$

Vectores: Módulo de un vector en función de sus coordenadas.

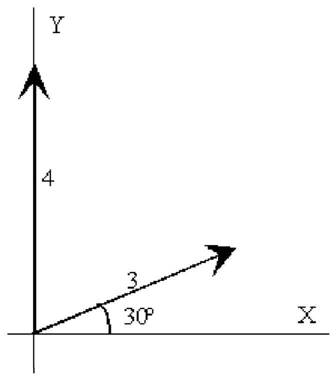
$v.v = \|v\|.\|v\|.\cos(v,v) = \|v\|^2.\cos 0 = \|v\|^2.1 = \|v\|^2$	Por tanto: $\|v\| = \sqrt{v.v}$
Si las coordenadas de v son (v_1,v_2)	$v.v = v_1.v_1 + v_2.v_2 = v_1^2 + v_2^2$
$\|v\| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$	

Vectores: Coseno del ángulo de dos vectores.

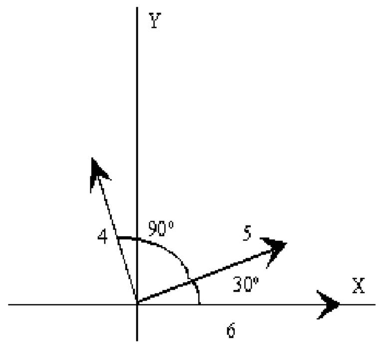
De la definición de producto escalar: $u.v = \|u\|.\|v\|.\cos(u,v)$	se deduce que: $\cos(u,v) = \dfrac{u.v}{\|u\|.\|v\|}$
Y mediante las coordenadas:	$\cos(u,v) = \dfrac{u_1.v_1 + u_2.v_2}{\sqrt{u_1^2 + u_2^2}\cdot\sqrt{v_1^2 + v_2^2}}$

Problemas

1.-Dados los dos vectores de la figura, efectuar gráficamente las siguientes operaciones.



$$\vec{u} + \vec{v}, \quad \vec{u} - \vec{v}, \quad \vec{v} - \vec{u}, \quad \vec{u} - 2\vec{v}$$



2.-Dados los vectores de la figura

- Hallar su suma geométrica
- Hallar las componentes de cada vector
- Hallar el vector suma
- El ángulo que forma el vector suma con el vector mayor.

3.-Un móvil se desplaza 100 m hacia el Este, 300 m hacia el Sur, 150 m en la dirección S 60º O, y 200 m en la dirección N 30º O.

- Representar el camino seguido por el móvil.
- Hallar el vector desplazamiento.

4.-Dados los vectores

$a) u = 2x + 3y$
$b) v = -5x + 7y$
$c) w = -3x - 3y$
$d) z = 5x - 2y$
$Calcula: u + v, u - v, 8w, -\frac{2}{3}w, u \bullet v, -5z \bullet 6v$

5.-Encontrar el ángulo entre dos vectores de 10 y 15 unidades de longitud sabiendo que su resultante tiene 20 unidades de longitud.

6.-Encontrar el ángulo entre dos vectores de 8 y 10 unidades de longitud, cuando su resultante forma un ángulo de 50º con el vector mayor.

7.- Hallar el área de un paralelogramo cuyos lados no paralelos son los vectores $\vec{a} = 4\vec{u}_1 - 3\vec{u}_2$ y $\vec{b} = 2\vec{u}_1 + 3\vec{u}_2$.

8.- Aplicando la definición de producto escalar, demostrar el teorema de Pitágoras.

9.-Demostrar que las dos diagonales de un rombo son perpendiculares.

Trabajo sobre vectores

1.- Sean los vectores libres $\breve{u} = \overrightarrow{(2,4)} y \breve{v} = \overrightarrow{(3,-3)}$.

a) Dibújalos (tómese como origen de los vectores el origen de coordenadas).

b) Hallar $2\mathring{u}, \frac{1}{2}\mathring{u}, -\mathring{u}, -2\mathring{u} \;\; y \;\; -\frac{1}{2}\mathring{u}$, y dibújalos.

c) Hallar $3\mathring{v}, \frac{1}{3}\mathring{v}, -\mathring{v}, -3\mathring{v} \; y -\frac{1}{3}\mathring{v}$, y dibújalos.

2.- Sean los vectores libres $\breve{u} = \overrightarrow{(-4,2)} \;\; y \;\; \breve{v} = \overrightarrow{(3,-9)}$.

a) Dibújalos (tómese como origen el origen de coordenadas).

b) Hallar $2u \;\; y -2u$, dibújalos.

c) Hallar $2\mathring{u} + \frac{1}{3}\mathring{v} \;\; y \;\; 2\mathring{u} - \frac{1}{3}\mathring{v}$

3.- Sean los vectores libres $\breve{u} = \overrightarrow{(4,-4)} \; y \; \breve{v} = \overrightarrow{(3,2)}$.

a) Hallar $u + v$

b) Dibujar $u, v \;\; y \, u + v$ tomando como origen el punto (-3, 2).

c) Dibujar $u, v \;\; y \, u + v$ tomando como origen el punto (2, -1).

4.- Calcula el módulo de los siguientes vectores:

$a)\overrightarrow{(3,4)} \qquad b)\overrightarrow{(0.-4)} \qquad c)\overrightarrow{(-2,5)} \qquad d)\overrightarrow{(-5,12)} \qquad e)\overrightarrow{\left(\sqrt{2},\sqrt{7}\right)} \qquad f)\overrightarrow{\left(\frac{3}{5},-\frac{2}{5}\right)}$

5.- Sean $\breve{u} = \overrightarrow{(3,-4)}, \breve{v} = \overrightarrow{(2.5)} \; y \; \breve{w} = \overrightarrow{(-1,6)}$. Calcular $u \bullet v$, $u \bullet w \;\; y \;\; v \bullet w$.

6.- ¿Cuáles de las siguientes parejas de vectores son ortogonlas?

$a)\overrightarrow{(1,2)} \;\; y \;\; \overrightarrow{(0,0)} \qquad b)\overrightarrow{(3,4)} \;\; y\overrightarrow{(4,-3)} \qquad c)\overrightarrow{(1,3)} \;\; y \;\; \overrightarrow{(3,1)} \qquad d)\overrightarrow{(6,-15)} \;\; y \;\; \overrightarrow{(-20,50)}$

7.- Calcular el ángulo que forman las siguientes parejas de vectores:

a) (2,1) y (3,4) b)(-1,4) y (2,3) c) (3,7) y (-7,3) d)(3,-2) y (2,-3)

8.- Demostrar que $\mathring{u} \bullet \mathring{u} = |\mathring{u}|^2$

VECTORES

Vector fijo : es un segmento cuyos extremos se dan en cierto orden . Se simbolizan de la siguiente forma : $\overrightarrow{AB}$.

Características de un vector fijo :

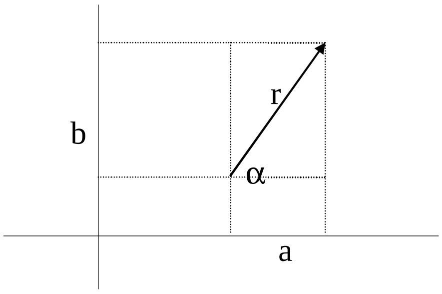
1º Módulo : es la longitud del segmento $\overline{AB}$. Se simboliza por $/\overrightarrow{AB}/$
2º Dirección : es la determinada por la recta que pasa por A y B , se indicar mediante al ángulo que forma con una semirecta conocida , normalmente el eje OX+ .

3º Sentido : es el del origen A al extremo B , es decir no es lo mismo $\overrightarrow{AB}$ que $\overrightarrow{BA}$, ya que tienen mismo módulo y dirección , pero distinto sentido .

Componentes de un vector :

Si $A(x_1 , x_2)$ y $B(y_1 , y_2)$ entonces las componentes del vector $\overrightarrow{AB}$ serán los números reales $y_1 - x_1$ e $y_2 - x_2$, y se escribe $\overrightarrow{AB} = (y_1 - x_1 , y_2 - x_2)$.
<u>No se debe confundir las "coordenadas de un punto" , con las "componentes de un vector" .</u>

Calculo de las componentes de un vector :



De la figura se deduce que :
$a = r \cos\alpha$
$b = r \operatorname{sen}\alpha$
Dividiendo :
$\operatorname{tg}\alpha = b/a$
Por Pitágoras :
$r^2 = a^2 + b^2$

Ejemplo : Si A(3 , 1) y B(-2 , 4) calcular : (Hacer un dibujo para aclararse)

a) Componentes de $\overrightarrow{AB} = (-5 , 3)$

b) Módulo de $\overrightarrow{AB} = \sqrt{(-5)^2 + 3^2} = \sqrt{34}$

c) Dirección : $\operatorname{tg}\alpha = 3/-5 \Rightarrow \alpha = \operatorname{arctg} 3/-5 = -31º$ ó 149º ya que $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(180 + \alpha)$
Es decir la dirección es la de la recta que forma -31º ó 149º con el eje OX+
d) Sentido : puesto que (-5 , 3) pertenece al segundo cuadrante elegimos 149º .

Ejemplo : Si un vector tiene 4 cm de módulo y forma un ángulo de 30º con el eje OX+ calcular sus componentes :

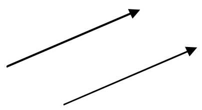
$a = 4 \cdot \cos 30º = 4 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$

$b = 4 \cdot \operatorname{sen} 30º = 4 \cdot 1/2 = 2$

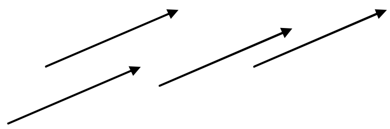
Nota :con los datos del problema no se puede calcular las coordenadas del origen y extremo .

Ejercicio : El origen de un vector fijo es el punto A(-1 , 2) , su módulo es de 3 cm y el ángulo que forma con el eje OX+ es $5\pi/3$. Calcular las componentes del vector y las coordenadas del extremo B .

Vectores equipolentes :
Dos vectores fijos se dicen equipolentes si tienen el mismo módulo , dirección y sentido , o dicho de otra forma , dos vectores son equipolentes cuando tienen las mismas componentes .



Vector libre :
Se llama vector libre a cada vector fijo junto con todos sus equipolentes .



Así pues la frase : " el vector libre (3 , 4)" significa lo mismo que "el conjunto de vectores fijos de componentes (3 , 4)"
Un "representante" de un vector libre es uno cualquiera de los vectores fijos que lo forman .

Un vector libre representado por el vector fijo $\vec{AB}$ se simboliza por { $\vec{AB}$ } o por una letra minúscula o en negrita : $\vec{a}$ ó **a** . Siguiendo esta notación , el módulo de un vector libre se suele representar por /{ $\vec{AB}$ }/ , / $\vec{a}$ / ó a .

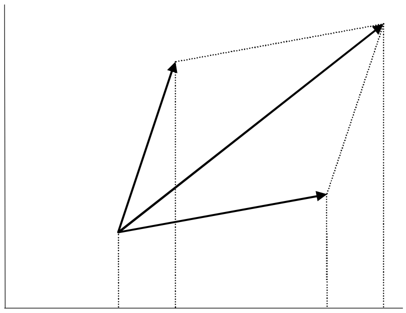
Ejercicio : Calcular el módulo del vector libre $\vec{a}$ =(2 , 1) . Si $\vec{AB}$ es un representante de $\vec{a}$, calcular el ángulo que $\vec{AB}$ forma con el eje OX+ .

Ejercicio : Averiguar si los vectores libres (3 , 4) y (-6 , -8) tienen el módulo dirección y sentido .

Suma de vectores libres :

1º Gráficamente : para sumar los vectores libres $\vec{a}$, $\vec{b}$ se procede de la siguiente forma : partiendo de un punto A cualquiera del plano se traza un representante $\vec{AB}$ del vector $\vec{a}$, y con origen en B , se traza un representante $\vec{BC}$ del vector libre $\vec{b}$. El vector libre $\vec{c}$ cuyo representante $\vec{AC}$ va del origen del primero al extremo del segundo , es el vector suma . Esta forma de definir el vector suma se llama regla del paralelogramo .

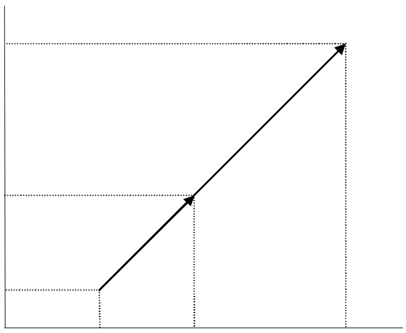
2º Analíticamente : si $\vec{a} = (x_1 , x_2)$ y $\vec{b} = (y_1 , y_2)$ se llama suma $\vec{a} + \vec{b}$ al vector libre de componentes $\vec{c} = (x_1 + y_1 , x_2 + y_2)$



<u>Cuestión :</u> Si un vector libre $\vec{a}$ tiene módulo 3 y otro $\vec{b}$ módulo 4 , que puedes decir del módulo de $\vec{a} + \vec{b}$.
Solución : pues que el módulo está comprendido entre 1 y 7 .

Producto de un número real por un vector libre

1º Gráficamente : Si multiplicamos un vector por un número real lo que obtenemos es otro vector de la misma dirección , y del mismo sentido (en el caso de que sea positivo) . El módulo se obtendrá de multiplicar el valor absoluto del número real , por el módulo del vector .
2º Analíticamente : si $\vec{a} = (x_1 , x_2)$ se llama producto del número real k por el vector $\vec{a}$, al vector $b = k \cdot \vec{a} = (kx_1 , kx_2)$



Aplicaciones :
1º Calcular las coordenadas de los puntos que dividen un segmento $\overline{AB}$ en dos o tres partes iguales .

<u>Ejercicio :</u> Calcular las coordenadas del punto medio entre A(1 , 2) y B(3 , 8) .

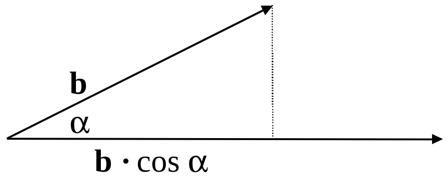
2º Calcular el simétrico de un punto respecto de otro .

<u>Ejercicio :</u> Calcular el simétrico del punto (6 , -2) respecto del punto (-8 , 4)

Producto escalar de dos vectores libres
El procucto escalar de dos vectores **a** y **b** es un número que resulta de multiplicar sus módulos por el coseno del ángulo menor que forman , es decir :

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = /\mathbf{a}/ \cdot /\mathbf{b}/ \cdot \cos \alpha$$

Interpretación geométrica :
El producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él .



$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = /\mathbf{a}/ \cdot \text{Proy}_a b \text{ (proyección de b sobre a)}$$

Consecuencias :

- si **a** = **b** entonces $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = /\mathbf{a}/ \cdot /\mathbf{a}/ \cdot \cos 0 = /\mathbf{a}/^2 \Rightarrow /\mathbf{a}/ = \sqrt{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}$ Importante
- si los vectores son paralelos y con el mismo sentido : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = /\mathbf{a}/ \cdot /\mathbf{b}/ \cdot \cos 0 = /\mathbf{a}/ \cdot /\mathbf{b}/$
- si los vectores son paralelos y pero con distinto sentido : $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = /\mathbf{a}/ \cdot /\mathbf{b}/ \cdot \cos 180 = -/\mathbf{a}/ \cdot /\mathbf{b}/$
- si los vectores son perpendiculares se dice que son **vectores ortogonales** , si los vectores son de módulo unidad se les llama **vectores unitarios o normales** , y si se cumplen las dos cosas a la vez se les llama **vectores ortonormales** :

  perpendiculares $\Rightarrow \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = /\mathbf{a}/ \cdot /\mathbf{b}/ \cdot \cos 90 = 0$

También se puede ver al revés , es decir , cuando el producto escalar de dos vectores es cero , entonces , o los vectores son nulos , o son perpendiculares .

- Se puede calcular a partir de un vector **a** , otro vector **u** que tenga la misma dirección , el mismo sentido , y sea unitario : $\mathbf{u} = \dfrac{\mathbf{a}}{/\mathbf{a}/}$ se puede ver facilmente que tiene la misma dirección y sentido que **a** y es unitario porque

$$/\mathbf{u}/ = \sqrt{\mathbf{u} \bullet \mathbf{u}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a}}{/\mathbf{a}/} \bullet \frac{\mathbf{a}}{/\mathbf{a}/}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}{/\mathbf{a}/^2}} = \sqrt{\frac{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}{\mathbf{a} \bullet \mathbf{a}}} = 1$$

Ejercicio : Calcular el producto escalar de los vectores **a** = (3 , 1) y **b** = (2 , 2)
Ejercicio : Calcular un vector unitario que tenga la dirección y sentido de (4 , 5)

Combinación lineal de dos o más vectores
Se llama combinación lineal de los vectores **a , b , c ......** a cada uno de los vectores de la forma $\mathbf{u} = a_1 \mathbf{a} + a_2\mathbf{b} +$ ....Por ejemplo : (4 , -1) = 2(1 , 1) + 1(2 , -3)   en este caso diremos que (4 , -1) es combinación lineal de (1 , 1) y (2 , -3) . Hacer un

Vectores linealmente dependientes e independientes
Se dice que un conjunto de vectores son linealmente dependientes cuandocada uno de ellos puede expresarse como combinación lineal de los restantes . En caso contrario se dice que son independientes . La forma de comprobarlo es igualar al vector cero una combinación lineal de todos ellos , si no todos los coeficientes son nulos entonces son dependientes , en caso contrario son independientes .

Sistema de generadores
Un conjunto de vectores se dice que es un sistema generador si y solo si todo vector del espacio se puede expresar como combinación lineal de ellos .
Por ejemplo el vector (1 , 0) y (0 , 1) son sistema de generadores de R^2 ya que cualquier vector se puede expresar como combinación lineal de ellos :
(-8 , 3) = -8(1 , 0) + 3(0 , 1) Hacer un dibujo para que se comprenda .
Para demostrar que son generadores se iguala una combinación lineal de ellos a un vector (a , b) , si al resolver el sistema podemos poner cualquier valor de a y b , entonces es que son sistema de generadores ya que generan cualquier vector .

Base
Un conjunto de vectores se dice que forman una base cuando son :
- sistema de generadores
- linealmente independientes

Coordenadas de un vector respecto de una base
Sea B = $\{\mathbf{u_1} , \mathbf{u_2}\}$ una base , si se verifica la igualdad : $\mathbf{x} = x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2}$ entonces a los coeficientes x_1 y x_2 se les llama coordenadas de **x** respecto de la base B y componentes de **x** a $x_1\mathbf{u_1}$, $x_2\mathbf{u_2}$.

Ejercicio : Comprobar que (-1 , 1) y (2 , -1) forman una base . Calcular las coordenadas de (1 , 2) respecto de esta base . Hacer un dibujo para que se comprenda .

Tipos importantes de bases
- Se dice que una base es **normada** cuando los vectores que la forman son unitarios , es decir de módulo unidad $/\mathbf{u_1}/ = /\mathbf{u_2}/ = 1$.
- Se dice que una base es **ortogonal** cuando los vectores son ortogonales o perpendiculares entre sí , por lo tanto $\mathbf{u_1} \cdot \mathbf{u_2} = 0$
- Se dice que una base es **ortonormal** cuando es normada y ortogonal a la vez .

Cambio de base
El problema que vamos a resolver se enuncia así :
Conociendo las coordenadas (x_1 , x_2) del vector **u** en la base B = $\{\mathbf{u_1} , \mathbf{u_2}\}$ hallar las coordenadas (x_1' , x_2') de **u** en la base B' = $\{\mathbf{u_1}' , \mathbf{u_2}'\}$
Para resolverlo se precisa conocer la expresión de los vectores de la primera base en función de los de la segunda base o viceversa :
$\mathbf{u_1} = a_{11}\mathbf{u_1}' + a_{12}\mathbf{u_2}'$
$\mathbf{u_2} = a_{21}\mathbf{u_1}' + a_{22}\mathbf{u_2}'$
Entonces :
$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u_1}+x_2\mathbf{u_2} = x_1(a_{11}\mathbf{u_1}' + a_{12}\mathbf{u_2}') + x_2(a_{21}\mathbf{u_1}' + a_{22}\mathbf{u_2}') = (x_1a_{11}+x_2a_{21})\mathbf{u_1}' +(x_1a_{12}+x_2a_{22})\mathbf{u_2}'$
Pero por otro lado :
$\mathbf{u} = x'_1\mathbf{u_1}'+x'_2\mathbf{u_2}'$
Comparando las dos igualdades :
$x_1' = x_1a_{11} + x_2a_{21}$
$x_2' = x_1a_{12} + x_2a_{22}$
que son las fórmulas del cambio de base .

Ejercicio : Se sabe que el vector **u** en la base B tiene por coordenadas (3 , 1) , es decir

$\mathbf{u} = 3\mathbf{u_1} + 1\mathbf{u_2}$. Hallar las coordenadas de **u** respecto de la base B' sabiendo que :
$\mathbf{u_1} = 2\mathbf{u_1}' + \mathbf{u_2}'$
$\mathbf{u_2} = \mathbf{u_1}' - 4\mathbf{u_2}'$
Hacer un dibujo del problema . Poner en los ejes la base B'.

Expresión analítica del producto escalar
Sea B = {$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$} una base , y **u** y **v** dos vectores cualesquiera que se pueden expresar como combinación lineal de los vectores de la base .
$\mathbf{u} = x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2}$
$\mathbf{v} = y_1\mathbf{u_1} + y_2\mathbf{u_2}$
Por lo tanto tendremos que :
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = (x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2}) \cdot (y_1\mathbf{u_1} + y_2\mathbf{u_2}) = x_1x_2/\mathbf{u_1}/^2 + y_1y_2/\mathbf{u_2}/^2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{u_1}\mathbf{u_2}$
Si la base es normada :
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2 + (x_1y_2 + x_2y_1)\mathbf{u_1}\mathbf{u_2}$
Si la base es ortogonal :
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2/\mathbf{u_1}/^2 + y_1y_2/\mathbf{u_2}/^2$
Si la base es ortonormal : (Caso más importante y más sencillo)
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v} = x_1x_2 + y_1y_2$

Ejercicio : Calcular $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$, siendo $\mathbf{u} = 2\mathbf{u_1} - 3\mathbf{u_2} = (2 , -3)$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u_1} + \mathbf{u_2} = (1 , 1)$ en los siguientes casos :
a) $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ son dos vectores de módulo 2 y 3 respectivamente y forman 30º
b) $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ son dos vectores unitarios que forman 45º
c) $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ son dos vectores ortogonales , de módulos 3 y 4 respectivamente
d) $\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$ son dos vectores ortonormales .

Expresión analítica del módulo de un vector
Ya vimos anteriormente que el módulo de un vector era :
$\mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = /\mathbf{u}/ \cdot /\mathbf{u}/ \cos 0 = /\mathbf{u}/^2 \Rightarrow /\mathbf{u}/ = \sqrt{\mathrm{u} \bullet \mathrm{u}}$ por lo tanto :
$/\mathbf{u}/ = \{ (x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2}) \cdot (x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2}) \}^{1/2} = \{ x_1^2/\mathbf{u_1}/^2 + x_2^2/\mathbf{u_2}/^2 + 2x_1x_2\mathbf{u_1}\mathbf{u_2} \}^{1/2}$
En el caso de que sea una base normada :
$/\mathbf{u}/ = \{ x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2\mathbf{u_1}\mathbf{u_2} \}^{1/2}$
Base ortogonal :
$/\mathbf{u}/ = \{ x_1^2/\mathbf{u_1}/^2 + x_2^2/\mathbf{u_2}/^2 \}^{1/2}$
Base ortonormal:
$/\mathbf{u}/ = \{ x_1^2 + x_2^2 \}^{1/2}$

Expresión cartesiana del coseno del ángulo que forman dos vectores

$$\cos(\mathbf{u} , \mathbf{v}) = \frac{\mathbf{u} \bullet \mathbf{v}}{/\mathbf{u}/ \bullet /\mathbf{v}/}$$

Suponiendo el caso más sencillo , que es el de una base ortonormal , tendremos :

$$\cos(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \frac{x_1y_1 + x_2y_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2} \bullet \sqrt{y_1^2 + y_2^2}}$$

En el caso de que **v** sea un vector de la base ortonormal , el cos se llama **coseno director** y es el coseno del ángulo que forma el vector **u** con el vector de la base **v** .

Ejercicio : Calcular el ángulo que forman entre sí , los vectores : $\mathbf{u}(2 , 1)$ y $\mathbf{v}(-1 , 3)$ sabiendo que estas coordenadas están expresadas respecto de una base ortonormal B = $\{\mathbf{u_1} , \mathbf{u_2}\}$, es decir :

$\mathbf{u} = 2\mathbf{u_1} + 1\mathbf{u_2}$

$\mathbf{v} = -1\mathbf{u_1} + 3\mathbf{u_2}$

$$\cos\alpha = \frac{2\bullet(-1)+1\bullet 3}{\sqrt{5}\bullet\sqrt{10}} = \frac{1}{\sqrt{50}} = 0'14 \text{ luego } \alpha = 81'8^{o}$$

Hacer un dibujo suponiendo que la base ortonormal es la canónica .

Ejercicios :

1º Sea B = $\{\mathbf{u_1} , \mathbf{u_2}\}$ una base tal que $/\mathbf{u_1}/ = /\mathbf{u_2}/ = 2$ y forman 60º . Calcular :

a) Módulo del vector $\mathbf{u} = 2\mathbf{u_1} + 3\mathbf{u_2}$.

b) Producto escalar de los vectores $\mathbf{u} = 2\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2}$ y $\mathbf{v} = -4\mathbf{u_1} + 3\mathbf{u_2}$

c) Valor de k para que los vectores $\mathbf{u} = 11\mathbf{u_1} + k\mathbf{u_2}$ y $\mathbf{v} = \mathbf{u_1} + 2\mathbf{u_2}$ sean ortogonales .

d) cos ($\mathbf{u}$,$\mathbf{v}$) siendo $\mathbf{u} = 2\mathbf{u_1} - \mathbf{u_2}$ y $\mathbf{v} = -\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}$

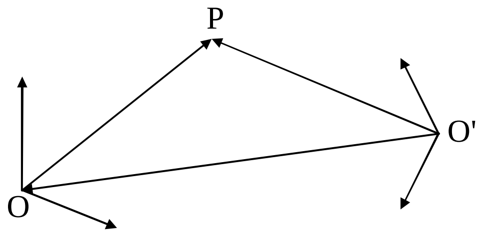
2º Responder a las preguntas anteriores pero suponiendo que sea B = $\{\mathbf{u_1} , \mathbf{u_2}\}$ una base ortonormal .

Sistema de referencia

Un sistema de referencia en el plano está formado por un punto O que se llama origen del sistema , y por dos vectores que constituyen la base del sistema .

Cambio de sistema de referencia

Vamos a plantear el siguiente problema : consideremos dos sistemas de referencia en el plano S = $(O;\mathbf{u_1} , \mathbf{u_2})$ y S' = $(O';\mathbf{u_1}' , \mathbf{u_2}')$ .Se sabe que el punto P tiene de coordenadas (x_1 , x_2) respecto de S . Calcular las coordenadas de P respecto de S' .



La relación entre B y B' es :

$\mathbf{u_1} = a_{11}\mathbf{u_1}' + a_{12}\mathbf{u_2}'$

$\mathbf{u_2} = a_{21}\mathbf{u_1}' + a_{22}\mathbf{u_2}'$

Las coordenadas de O respecto de O' son (a , b)

Fijandonos en el dibujo :

$\mathbf{O'P = O'O + OP}$

Por lo tanto :

$x'_1\mathbf{u_1}'+x'_2\mathbf{u_2}' = a\mathbf{u_1}' + b\mathbf{u_2}' + x_1\mathbf{u_1} + x_2\mathbf{u_2} = a\mathbf{u_1}' + b\mathbf{u_2}' + x_1(a_{11}\mathbf{u_1}' + a_{12}\mathbf{u_2}') + x_2(a_{21}\mathbf{u_1}' + a_{22}\mathbf{u_2}') = (a + x_1a_{11} + x_2a_{21})\mathbf{u_1}' + (b + x_1a_{12} + x_2a_{22})\mathbf{u_2}'$.

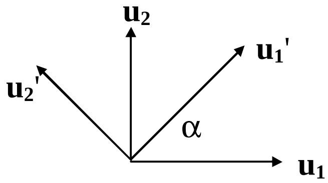
Comparando el principio con el final :

$x_1' = a + x_1a_{11} + x_2a_{21}$

$x_2' = b + x_1a_{12} + x_2a_{22}$

Ejercicio : Se conocen las coordenadas (-1 , 3) de un punto P respecto del sistema de referencia S . Se sabe además que O' tiene de coordenadas (2 , 4) respecto de O .
También se sabe que :
$\mathbf{u_1}' = -2\mathbf{u_2}$
$\mathbf{u_2}' = -\mathbf{u_1} + \mathbf{u_2}$
Calcular las coordenadas de P respecto de S' .
Hacer un dibujo .

Cambio de sistema de referencia ortonormales
En el caso de que las bases sean ortonormales , podemos calcular las coordenadas de $\mathbf{u_1}$ y $\mathbf{u_2}$ en función del ángulo que forman con los vectores $\mathbf{u_1}'$ y $\mathbf{u_2}'$.
$\mathbf{u_1} = a_{11}\mathbf{u_1}' + a_{12}\mathbf{u_2}'$
$\mathbf{u_2} = a_{21}\mathbf{u_1}' + a_{22}\mathbf{u_2}'$



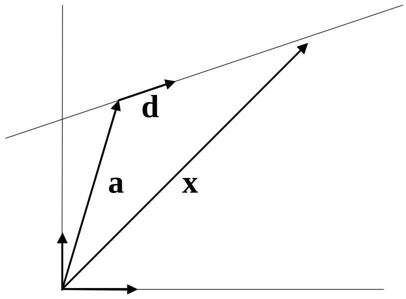
$\mathbf{u_1} = \cos\alpha\ \mathbf{u_1}' - \operatorname{sen}\alpha\ \mathbf{u_2}'$
$\mathbf{u_2} = \operatorname{sen}\alpha\ \mathbf{u_1}' + \cos\alpha\ \mathbf{u_2}'$
Luego tenemos :
$x_1' = a + x_1\cos\alpha + x_2\operatorname{sen}\alpha$
$x_2' = b - x_1\operatorname{sen}\alpha + x_2\cos\alpha$

En el caso de que haya una <u>traslación de ejes</u> , las bases siguen siendo las mismas , solo cambia el origen , haciendo $\alpha = 0$:
$x_1' = a + x_1$
$x_2' = b + x_2$
En el caso de que haya una <u>rotación de ejes</u> , los origenes coinciden y (a , b) = (0 , 0) por lo que :
$x_1' = x_1\cos\alpha + x_2\operatorname{sen}\alpha$
$x_2' = - x_1\operatorname{sen}\alpha + x_2\cos\alpha$

Ejercicio : Calcular las coordenadas de P respecto de S' = (O';$\mathbf{u_1}'$, $\mathbf{u_2}'$) sabiendo que respecto de S = (O;$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$) son (3 , 4) y que S' está girado 45º respecto de S . Se supone que los sistemas son ortonormales .

PROPIEDADES MÉTRICAS DEL PLANO

Ecuaciones de la recta



Como se puede comprobar en el dibujo :

$\boxed{\mathbf{x} = \mathbf{a} + t\mathbf{d}}$ siendo $t \in R$ Ec vectorial de la recta

Puesto que estamos utilizando un sistema de referencia S = (O;$\mathbf{u_1}$, $\mathbf{u_2}$) entonces tendremos :

$(x , y) = (x_0 , y_0) + t(d_1 , d_2) \Rightarrow \boxed{\begin{array}{l} x = x_0 + td_1 \\ y = y_0 + td_2 \end{array}}$ Ec paramétricas de la recta

Despejando t e igualando :

$$\boxed{\frac{x - x_0}{d_1} = \frac{y - y_0}{d_2}}$$ Ec continua de la recta

Nota : en el caso de que d_1 o d_2 sean 0 entonces significa que los vectores directores son paralelos a los ejes y por tanto , si $d_1 = 0$ entonces $x = x_0 =$ cte recta paralela al eje y que pasa por x = 3 , y analogamente para $d_2 = 0$.
Si pasamos todo al mismo miembro :

$d_2x - d_1y - x_0d_2 + y_0d_1 = 0 \Rightarrow \boxed{Ax + By + C = 0}$ Ec general de la recta
siendo $A = d_2$ y $B = -d_1$
Se puede observar que A y B no son más que las componentes de un vector perpendicular al vector director ya que $(d_1 , d_2)\cdot(A , B) = (d_1 , d_2)\cdot(d_2 , -d_1) = 0$
Si en la ec general despejamos C y dividimos por -C obtenemos :

$$\frac{x}{-\frac{C}{A}} + \frac{y}{-\frac{C}{B}} = 1 \Rightarrow \boxed{\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1}$$ Ec canónica o segmentaria de la recta

en este caso a y b son los puntos de corte con los ejes .
Si en la ec continua pasamos los denominadores a un miembro y los numeradores a otro obtenemos :

$$\boxed{\frac{y - y_0}{x - x_0} = \frac{d_2}{d_1} = m}$$ Ec en la forma punto pendiente

Si despejamos la y en esta ecuación :

$y = mx - x_0 m + y_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{y = mx + n}$ Ec explícita de la recta

En esta ecuación la m nos da la inclinación de la recta y n nos da la ordenada en el origen o punto de corte con el eje y .

Ejercicio : Calcular las todas las ecuaciones de la recta que pasa por los puntos A(2 , 3) y (-1 , 1) .

Posición relativa de dos rectas en el plano

Puede ocurrir 3 casos :

a) Que sean paralelas :

- Los vectores directores son dependientes o paralelos o proporcionales , pero ningun punto pertenece a las dos rectas a la vez .
- Tienen la misma pendiente m pero distinto n
- La relación entre los coeficientes de la ec general es $A/A'=B/B'\neq C/C'$

b) Que sean coincidentes :

- Los vectores directores son paralelos y los puntos pertenecen a las dos rectas a la vez .
- Tienen la misma pendiente y n
- La relación entre los coeficientes de la ec general es $A/A'=B/B'=C/C'$

c) Se corten :

- Los vectores directores no son paralelos
- Distinta m
- La relación entre los coeficientes de la ec general es $A/A'\neq B/B'$

Un caso particular de rectas que se cortan es el de rectas perpendiculares , veamos cuales son las condiciones para que dos rectas sean perpendiculares :

Si la recta r tiene de vector director (d_1 , d_2) una recta perpendicular a ella tendrá de vector director $(-d_2 , d_1)$ como ya vimos por lo que obtendremos :

recta r	recta paralela a r	recta perpendicular a r
$Ax + By + C = 0$	$Ax + By + C' = 0$	$-Bx + Ay + C = 0$
$y = mx + n$	$y = mx + n'$	$y = (-1/m)x + n'$
$(x , y)= (x_0 , y_0) + t(d_1 , d_2)$	$(x , y) = (x'_0 , y'_0) + t(d_1 , d_2)$	$(x , y) = (x'_0 , y'_0) + t(-d_2 , d_1)$

Ejercicio : Calcular la ecuación de la recta que pasa por el punto A(3 , -2) y es perpendicular a la recta $r \equiv 5x - 3y + 2 = 0$.

Calcular tambien una recta paralela a r y que pase por A .

Distancia entre dos puntos

La distancia entre dos puntos A y B es simplemente el módulo del vector que va desde A hasta B o al revés . Por lo tanto :

$$d(A,B) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

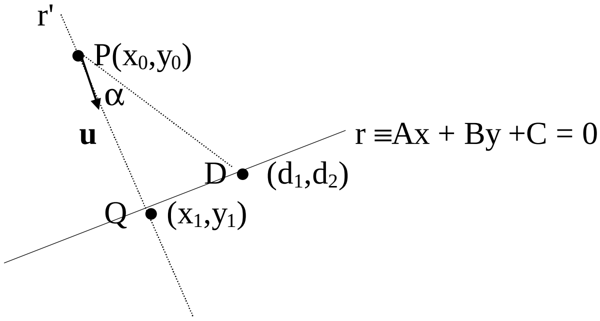
Distancia entre un punto y una recta

Para calcular la distancia mínima (perpenduicular) de un punto P a una recta r podriamos seguir los siguientes pasos :

- calcular una recta r' perpendicular a r que pase por P

- calcular el punto de intersección Q entre r y r'
- calcular la distancia entre P y Q

Para simplificar las operaciones se utiliza la siguiente fórmula :



PD · u = PD · 1 · cosα = PQ = d(P,Q)
Por otro lado :

$$\mathbf{PD \cdot u} = (d_1 - x_0\ ,\ d_2 - y_0)\cdot\left(\frac{A}{\sqrt{A^2+B^2}},\frac{B}{\sqrt{A^2+B^2}}\right) = \frac{-Ax_0 - By_0 + (Ad_1 + Bd_2)}{\sqrt{A^2+B^2}}$$

Puesto que D pertenece a r :

$$\mathbf{PD \cdot u} = \frac{-Ax_0 - By_0 - C}{\sqrt{A^2+B^2}} = d(P,Q)$$

Puesto que la distancia debe de ser positiva tomaremos el valor absoluto :

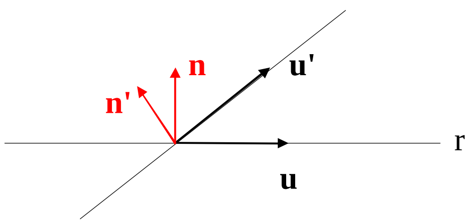
$$\boxed{d(P,r) = \left/\frac{Ax_0 + By_0 + C}{\sqrt{A^2+B^2}}\right/}$$

Ejercicio : Calcular la distancia del punto P (2 , -3) a la recta r ≡ y = 4x -10

Distancia entre dos rectas
Para calcular la distancia entre dos rectas debemos de comprobar si son paralelas , después debemos de obtener un punto una de ellas y por último calcular la distancia de este punto a la otra recta .

Ejercicio : Calcular la distancia entre las rectas r ≡ 2x + 5y -8 = 0 y r' ≡ -4x -15y +10 = 0

Ángulo entre dos rectas
Se llama ángulo entre dos rectas secantes al menor de los ángulos que determinan dichas rectas , o lo que es lo mismo , al menor de los ángulos que forman sus vectores directores , o lo que es lo mismo , al menor de los ángulos que forman sus vectores perpendiculares .



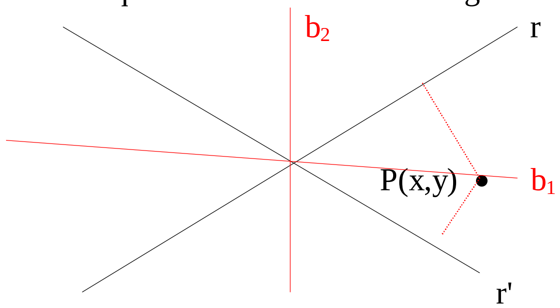
$$\cos(r\,,\,r') = \cos(\mathbf{u}\,,\,\mathbf{u'}) = \cos(\mathbf{n}\,,\,\mathbf{n'}) = \frac{\mathbf{n}\bullet\mathbf{n'}}{/\mathbf{n}/\bullet/\mathbf{n'}/} = \frac{/AA' + BB'/}{\sqrt{A^2+B^2}\bullet\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

Ejercicio : Calcular el ángulo que forman las rectas :

$$r \equiv \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} \quad y \quad r' \equiv \frac{x}{12} = \frac{y-3}{5}$$

Ecuación de las bisectrices de los ángulos que determinan dos rectas

Se llama bisectriz de un ángulo a la semirecta que tiene por origen al vértice del ángulo y divide a éste en dos partes iguales . Todos los puntos que pertenecen a la bisectriz poseen la propiedad de equidistar de los lados del ángulo .



Por ser P un punto de la bisectriz , la distancia de P a las rectas r y r' debe de coincidir por lo que :

$$/\frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2+B^2}}/ = /\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}/$$

Quitando los valores absolutos , obtendremos dos soluciones que son las ecuaciones de las dos bisectrices :

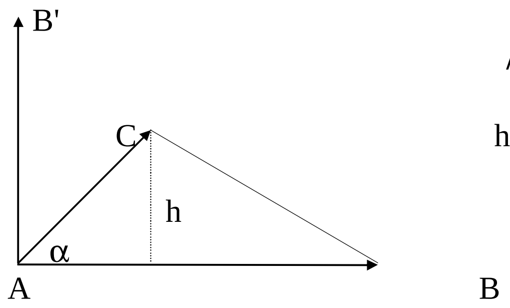
$$b_1 \equiv \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = \frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

$$b_2 \equiv \frac{Ax + By + C}{\sqrt{A^2+B^2}} = -\frac{A'x + B'y + C'}{\sqrt{A'^2+B'^2}}$$

Estas ecuaciones se pueden poner en forma general multiplicando en cruz .

Ejercicio : Calcular la ecuación de las bisectrices de los ángulos que determinan las rectas $r \equiv 3x - 4y +5 = 0$ y $r' \equiv 6x + 8y +1 = 0$.

Área de un triángulo



/AB/ = /AB'/

h = /**AC**/ sen α

Área = 1/2 · /**AB**/ · h = 1/2 · /**AB'**/ · /**AC**/ sen α = 1/2 · /**AB'**/ · /**AC**/ cos β =
= 1/2 · /**AB' · AC**/ donde se toma valor absoluto para que no salga un área negativa .

Ejercicio : Calcular el área del triángulo de vertices A(1 , 2) B(-1 , 4) y C(2 , 0) .

INICIACIÓN A LA GEOMETRÍA ANALÍTICA PLANA

1. a) Si dos vectores tiene la misma longitud, ¿podemos asegurar que son iguales? Razona la respuesta . Pon ejemplos

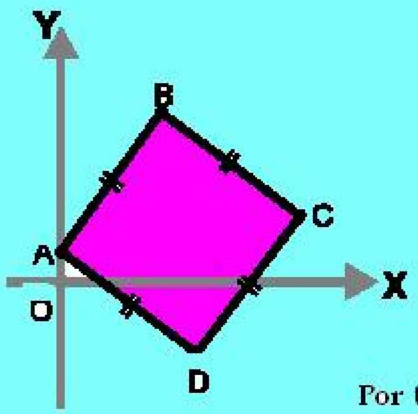
2. a)¿Cuántos sentidos pueden existir en una dirección dada?
b) ¿Es posible que dos vectores tengan la misma dirección, punto de aplicación e intensidad y que sean distintos? Razona la respuesta. Pon ejemplos

3. a) Si las direcciones de dos vectores convergen ¿podrán ser iguales los vectores?
b) Dos vectores son paralelos y tienen la misma intensidad. ¿Han de ser iguales?
Razona las respuestas. Pon ejemplos.

4. Dibuja en tu cuaderno tres vectores iguales y tres vectores distintos

5. a)Las componentes de un vector son 5 en el eje x y -4 en el eje y. ¿cuánto vale su intensidad (módulo)?
b) ¿Cuál de los siguientes vectores tiene mayor intensidad? (3,0); (2,1); (2,2); (3,2).
c) Demostrar que los puntos A (0, 1), B(3, 5), C(7, 2) y D(4, -2) son los vértices de un cuadrado
Solución

a)La intensidad o módulo del vector es: $|(5,4)| = \sqrt{5^2+4^2} = \sqrt{41}$
c) Se verifica:



- $|\overline{AB}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $|\overline{BC}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$
- $|\overline{AD}| = \sqrt{9+16} = \sqrt{25} = 5$
- $|\overline{CD}| = \sqrt{16+9} = \sqrt{25} = 5$

Como: $|\overline{AB}| = |\overline{BC}| = |\overline{AD}| = |\overline{CD}| = 5$

Por tanto: ABCD es un cuadrado.

6. a) Dados los vectores (1,2) y (0,-3) ¿cuál es el resultado de su adición?
b) Con los vectores v(1,2);w(2,-1) y u(-1,1) realiza las sumas: u + v + w , v + u + w . ¿Qué observas?
Solución

b) u + v + w = (2, 2); v + u + w = (2, 2). Son iguales, la suma es conmutativa.
Comprueba el resultado gráficamente

7. a) ¿Cuál será el vector opuesto del vector (1, 2)?
Con los vectores del segundo ejercicio anterior , realiza las sustracciones

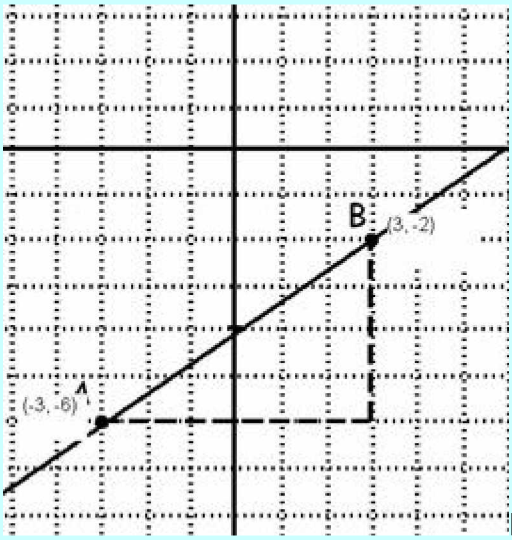
u - v , v – u, u - w.

8. Suma en tu cuaderno, de forma gráfica (2,1)+(-1,1)+(-2,0).
Realiza la suma anterior de forma analítica.

9. Dados los vectores v(1,2) y w(-2,1), ¿qué vector deberé sumar a v + w para obtener el vector (0,0)?
Solución
El (1, -3), pues tendrá que ser el opuesto de la suma v + w = (-1, 3). Comprueba la afirmación haciendo la suma gráficamente

10 Dados el punto P(1,-2) y el vector v =(-1,3) obtener:
a) Las ecuaciones vectorial, continua, general y explícita de la recta r que pasa por P y tiene como dirección v.
b) Obtener tres puntos de la recta distintos de P.
c) Comprobar si los puntos A(6,7), B(2,-5) y C(4,-1) son puntos de la recta r o no.
d) Representar la recta r.
Solución
a) x = (x, y) = (-1, 2) + t (-1, 3) ecuación vectorial

Eliminando el parámetro se llega a la ecuación continua: $\frac{x+1}{-1} = \frac{y-2}{3}$
De donde obtenemos la ecuación cartesiana: 3(x +1)=-(y-2) $\Rightarrow$ 3x +y = -1
Despejando obtenemos la ecuación explícita: y = -3x -1

11. Halla gráficamente la pendiente de la recta que pasa por los puntos A(-3, -6) y B((3, -2) y escribe su ecuación.
Solución


La pendiente según se ve en la gráfica es

$$m = \frac{+4}{+6} = \frac{2}{3}$$

la ordenada en el origen es -4
y por tanto la ecuación es

$$y = \frac{2}{3}x - 4$$

12. Halla la pendiente de las rectas que pasan por los puntos:

a) (2. 3) y (-1, 0)

b) (3, 1) y (4, -5) . Solución $\frac{-5-1}{4-3} = -6$

13. Dibuja y halla la ecuación de la recta que pasa por los puntos:

a) (2. 3) y (-1, 0); b) (3, 1) y (4, -5)

14. Hallar la ecuación de cada una de las siguientes rectas:

a) Pasa por el punto (0, 1) y tiene por pendiente 3

b) Pasa por el punto (0, 4) y tiene por pendiente 3/4

c) Pasa por el punto (-3, 3) y tiene por pendiente -4

15. Halla la pendiente de las rectas:

a) y = -3x +1; b) y = 2-x; c) 3x-2y-4=0; d) $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = 1$

16. a) Obtener la pendiente, la ordenada en el origen y la representación gráfica de la recta que pasa por los puntos P(1,2) y Q(5,-1).

b) Obtener la ecuación explícita y la general de la recta paralela a r que pasa por (0,-1).

Solución (Puede abordarse el problema de varias formas)

a) La ecuación de la recta que pasa por los puntos P y Q es y = mx +n, como pasa por P y Q se verifica $\begin{cases} 2 = m + n \\ -1 = 5m + n \end{cases}$ que por reducción nos da pendiente m =-3/4, ordenada en el origen n=11/4

La recta tiene por ecuación explícita $y = \frac{-3}{4}x + \frac{11}{4}$, y por cartesiana 3x +4y=11

b) La ecuación explícita de la recta paralela que pasa por (0, -1) es y =(-3/4)x-1 y la cartesiana

3x+ 4y=-4, Comprobarlo y hacer la gráfica

17. a) Obtener la pendiente, la ordenada en el origen y la representación gráfica de la recta que pasa por los puntos P(3,4) y Q(2,1).

b) Obtener la ecuación punto-pendiente de la recta paralela a r que pasa por (0,-2).

18.. Dados los puntos A(1, -3), B(2, 0) y C(-4, 1) se pide:

a) Ecuación de la recta r que pasa por A y B.

b) Ecuación de la recta paralela a r que pasa por C.

Solución (se puede hacer de varias formas)

a) el vector AB tiene de coordenadas (2, 0)-(1, -3)= (1, 3), luego la ecuación de r es:

$$\frac{x-1}{1}=\frac{y+3}{3}$$

b) la paralela que pasa por C tiene por ecuación $\frac{x+4}{1}=\frac{y-1}{3}$

19. Encontrar la ecuación de la recta r paralela a 2x-3y =4 que pasa por el punto de intersección de las rectas s y t de ecuaciones y =3x-1 , x +2y=-3

20. Encuentra la ecuación de la recta que tiene por dirección el vector v(-1, 3) y pasa por el punto de corte de las rectas de ecuaciones x + y =1 y 2x-3y=0

21. a) Calcular las coordenada del punto B de un segmento $\overline{AB}$, sabiendo que las coordenadas de A son (2, 6), y las del punto medio M son (4, 5)
b) Calcular la recta paralela a 2x +y-1=0 que pasa por el punto A(1, 1)
Solución

a) El punto medio del segmento tiene por coordenadas: $(m_1, m_2) = (\frac{a_1+b_1}{2}, \frac{a_2+b_2}{2})$, luego se tendrá (4, 5)= $(\frac{2+b_1}{2}, \frac{6+b_2}{2})$, es decir tendremos que 8=2 +b_1, de donde b_1= 6.
Análogamente b_2=4 (comprobarlo)
b) El haz de rectas paralelas es de la forma: 2x +y +c = 0 y como queremos la que pasa por el punto A(1, 1) $\Rightarrow$ 2.1+1 + c = 0, c =-3