11 Ecuación de la circunferencia

1. Halla las ecuaciones de las circunferencias que tienen el centro C y el radio R, que se indica en cada caso:

a) $C(0, 0)$ y $R = 5$ b) $C(1, 0)$ y $R = 3$ c) $C(0, -2)$ y $R = 4$ d) $C(1, -1)$ y $R = 2$

2. Halla el centro C y el radio R de las siguientes circunferencias:

a) $x^2 + y^2 - 4x - 8 = 0$

b) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

c) $x^2 + y^2 - 5x + y - 3 = 0$

3. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene por centro el punto $C(1, -1)$ y pasa por el punto $A(4, 3)$.

4. Halla la ecuación de la circunferencia cuyo centro es el punto de coordenadas $C(-1, 1)$ y es tangente al eje de las abscisas. ¿Cuánto vale su radio?

5. Determina las posiciones relativas de las circunferencias C_1 y C_2 dadas por las ecuaciones:

C_1: $x^2 + y^2 - 4x = 0$

C_2: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$

6. Halla la posición relativa de la bisectriz del primer cuadrante respecto de la circunferencia que tiene de ecuación $x^2 + y^2 - 2x = 0$, determinando, según el caso, las coordenadas de sus dos puntos de corte o las del punto de tangencia.

7. Estudia, utilizando el concepto de potencia de un punto P respecto de una circunferencia, la posición que ocupa el punto $P(1, -1)$ con respecto de las circunferencias que tienen las siguientes ecuaciones:

a) $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

b) $x^2 + y^2 + 2x + 4y = 0$

c) $x^2 + y^2 + 2x = 0$

8. Halla la ecuación de las tangentes a la circunferencia $x^2 + y^2 - 2 = 0$ que sean paralelas a la bisectriz del primer cuadrante. Determina las coordenadas del punto de tangencia con la circunferencia de cada una de las rectas calculadas.

9. Determina los ejes radicales de las siguientes parejas de circunferencias:

a) La que tiene por diámetro el segmento que une los puntos de coordenadas $A(2, 4)$ y $B(-1, 8)$ con la de ecuación $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$.

b) Las de ecuaciones $x^2 + y^2 - 2x + 4y + 3 = 0$; $x^2 + y^2 + 2x = 0$.

10. Determina qué punto del plano presenta la misma potencia respecto de las circunferencias cuyas ecuaciones son las siguientes:

$x^2 + y^2 - 2 = 0$; $x^2 + y^2 - 2x + 4y = 0$

$x^2 + y^2 + 3x + 5y - 1 = 0$

SOLUCIONES

1. Las ecuaciones son las siguientes:

a) $x^2 + y^2 = 25$

b) $(x - 1)^2 + y^2 = 9$; $x^2 + y^2 - 2x - 8 = 0$

c) $x^2 + (y + 2)^2 = 16$; $x^2 + y^2 + 4y - 12 = 0$

d) $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 4$
$x^2 + y^2 - 2x + 2y - 2 = 0$

2. Si $C(a, b)$ es el centro y R el radio, se tiene:

a) $\{-2a = -4; -2b = 0; a^2 + b^2 - R^2 = -8\}$
$a = 2$; $b = 0$ y $R = 2$

b) $\{-2a = -2; -2b = 4; a^2 + b^2 - R^2 = 0\}$
$a = 1$; $b = -2$ y $R = \sqrt{5}$

c) $\{-2a = -5; -2b = 1; a^2 + b^2 - R^2 = -3\}$
$a = \frac{5}{2}$; $b = -\frac{1}{2}$ y $R = 4$

3. La ecuación es de la forma $(x - 1)^2 + (y + 1)^2$, y por ser A un punto de la circunferencia se cumple $(4 - 1)^2 + (3 + 1)^2 = R^2$; $R = 5$, por tanto, su ecuación es $(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 25$; $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$.

4. Por ser tangente al eje de abscisas, su radio es la distancia del centro al propio eje de abscisas, $R = |1| = 1$. La ecuación de la circunferencia es:

$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$

$x^2 + y^2 + 2x - 2y - 1 = 0$

5. Sea $d = d(C_1, C_2)$ la distancia entre los centros, $s = R_1 + R_2$ la suma de los radios y $f = R_1 - R_2$ la diferencia:

C_1: $x^2 + y^2 - 4x = 0$, su centro es $C_1(2, 0)$ y su radio $R_1 = 2$

C_2: $x^2 + y^2 + 4x - 2y - 4 = 0$, su centro es $C_2(-2, 1)$ y su radio $R_2 = 3$

$$d = \sqrt{(2 + 2)^2 + (0 - 1)^2} = \sqrt{17}$$

siendo $s = 2 + 3 = 5$ y $f = 3 - 2 = 1$. Como $d < s$ y $d > f$, las circunferencias son secantes.

6. La bisectriz tiene de ecuación $y = x$. Los puntos de corte de la recta y la circunferencia verifican:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2x = 0 \\ y = x \end{array}\right\} 2x^2 - 2x = 0$$

$$\left\{\begin{array}{l} x_1 = 0;\ y_1 = 0 \\ x_2 = 1;\ y_2 = 1 \end{array}\right.$$

El sistema presenta dos soluciones; por tanto, la recta y la circunferencia son secantes y se cortan en los puntos $A_1(0, 0)$ y $A_2(1, 1)$.

7. El valor de la potencia del punto $P(1, -1)$ respecto de la circunferencia es:

a) $\text{Pot} = 1^2 + (-1)^2 - 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = -4 < 0$.
El punto es interior a la circunferencia.

b) $\text{Pot} = 1^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 1 + 4 \cdot (-1) = 0$.
El punto está sobre la circunferencia.

c) $\text{Pot} = 1^2 + (-1)^2 + 2 \cdot 1 = 4 > 0$. El punto es exterior a la circunferencia.

8. La tangente paralela a la bisectriz del primer cuadrante tiene de ecuación $y = x + k$. Para ser tangente ha de cortar a la circunferencia en un solo punto, así que el sistema:

$$\left.\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y = x + k \end{array}\right\}$$

ha de tener solución única. Sustituyendo:

$x^2 + (x + k)^2 - 0 \Rightarrow 2x^2 + 2kx + k^2 - 2 = 0$, que ha de verificar:

$(2k)^2 - 4 \cdot 2(k^2 - 2) = 0$

$$\left\{\begin{array}{l} k_1 = -2;\ \text{tangente } t_1\text{: } y = x - 2 \\ k_2 = 2;\ \text{tangente } t_2\text{: } y = x + 2 \end{array}\right.$$

Tendremos dos puntos de tangencia T_1 y T_2, cuyas coordenadas son solución de los sistemas:

$$\left\{\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y = x - 2 \end{array}\right. \quad T_1(1, -1)$$

$$\left\{\begin{array}{r} x^2 + y^2 - 2 = 0 \\ y = x + 2 \end{array}\right. \quad T_2(-1, 1)$$

9. a) Primera circunferencia:

Centro: $C = \left(\frac{2 - 1}{2}, \frac{4 + 8}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}, 6\right)$

Radio: $R = \frac{1}{2}d(A, B) =$

$$= \frac{\sqrt{(-1 - 2)^2 + (8 - 4)^2}}{2} = \frac{5}{2}$$

Su ecuación es: $\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + (y - 6)^2 = \frac{25}{4}$

$x^2 + y^2 - x - 12y + 30 = 0$

Restando las ecuaciones, se tiene para el eje radical la recta $x - 16y + 30 = 0$

b) Restando ecuaciones, el otro eje radical es la recta $4x - 4y - 3 = 0$

10. Es el centro radical de las tres circunferencias. Para calcularlo, hallamos el eje radical e_{12} de la 1.ª y 2.ª y el eje radical e_{13} de la 1.ª y 3.ª. Sus ecuaciones son: e_{12}: $-2x + 4y + 2 = 0$ y e_{13}: $3x + 5y + 1 = 0$. El centro radical es la solución del sistema

$$\left.\begin{array}{r} -x + 2y + 1 = 0 \\ 3x + 5y + 1 = 0 \end{array}\right\} \quad x = \frac{3}{11},\ y = -\frac{4}{11}$$

El punto es, por tanto, $P\left(\frac{3}{11}, -\frac{4}{11}\right)$