

---

# SOLIDOS

Las invenciones de los objetos concretos al concepto abstracto de los griegos, sentaron las bases para la geometría Euclidea. Aquí apreciamos algunas formas que ellos derivaron y que aún hoy día se usan con los mismos nombres: pirámide, cono, cilindro, cubo y esfera.

A una figura sólida también se le llama figura tridimensional, o simplemente cuerpo y forma parte de la Geometría del Espacio. Un sólido se caracteriza por tener tres dimensiones: largo, ancho y altura.

Los cuerpos sólidos se dividen en dos: poliedros y cuerpos redondos.

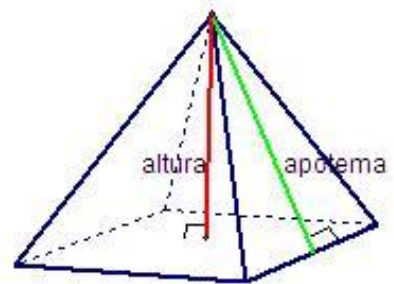
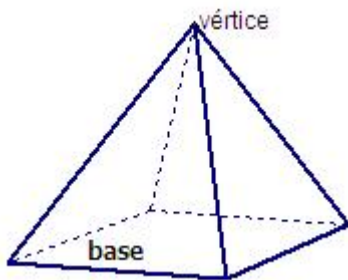
Los cuerpos que están delimitados completamente por superficies planas se llaman **poliedros**; mientras que los cuerpos geométricos que están delimitados por superficies curvas o por superficies planas y curvas, se llaman **cuerpos redondos**

## LOS POLIEDROS RECTOS

Un poliedro es un objeto tridimensional formado por regiones poligonales denominadas *caras*. Los lados y vértices de las caras reciben el nombre de *aristas* y *vértices* del poliedro respectivamente.

### Pirámides

Una pirámide es un poliedro en el cual todas las caras menos una, tienen un vértice común. Este vértice recibe el nombre de *vértice de la pirámide* y la cara que no contiene el vértice es la *base de la pirámide*



Un segmento que va del vértice a la base de una pirámide y sea perpendicular a la base es una *altura*.

Las alturas respectivas de los triángulos que forman las caras laterales de la pirámide, se llaman *apotemas* de la pirámide.

Dependiendo del número de lados de los polígonos en la base, es el nombre de la pirámide. Así tenemos por ejemplo:

1. Pirámide triangular: la base es un triángulo (si la base es un triángulo equilátero la pirámide es regular)
-

- 
2. Pirámide pentagonal: la base es un pentágono (si la base es un pentágono regular la pirámide es regular)
  3. Pirámide hexagonal: la base es un hexágono (si la base es un hexágono regular la pirámide es regular)

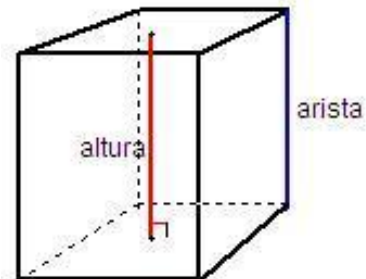
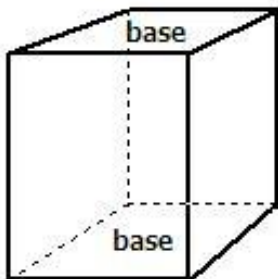
Una pirámide muy importantes es el:

*Tetraedro regular*: Es un pirámide recta que tiene sus seis aristas congruentes, por lo tanto, las cuatro caras son triángulos equiláteros congruentes entre sí.

## *Prismas*

Un prisma es un poliedro que satisface estas condiciones:

1. Hay un par de caras congruentes sobre planos paralelos (*llamados bases*).
2. Todas las demás caras son paralelogramos.



Un segmento que este entre las bases de un prisma y sea perpendicular a ellas es una *altura*.

Tanto en los prismas como en las pirámides, las caras que no son bases se llama *caras laterales* y las aristas que no pertenesen a la base se llaman *aristas laterales*.

Una pirámide es *regular* si su base es un polígono regular y sus aristas laterales son congruentes.

Un prisma es un *prisma recto* si sus aristas laterales son perpendiculares a las bases.

**Teorema: Las aristas laterales de un prisma son paralelas y congruentes.**

Dependiendo del número de lados de los polígonos en las bases, es el nombre del prisma. Así tenemos por ejemplo:

1. Prisma triangular: las bases son triángulos (si las bases son triángulos equiláteros el prisma es regular).
  2. Prisma pentagonal: Las bases son pentágonos (si las bases son pentágonos regulares el prisma es regular).
-

- 
3. Prisma hexagonal: Las bases son hexágonos (si las bases son hexágonos regulares el prisma es regular).

En matemática dos prismas muy importantes son:

1. *Paralelepípedo rectangular*: es un prisma recto que tiene rectángulos en las seis caras, es decir, tanto sus bases como sus caras laterales son rectángulos.
2. *Hexaedro regular o cubo*: es un prisma recto en el cual todas sus aristas son congruentes, por lo tanto, sus seis caras son cuadrados congruentes entre si.

## AREAS DE PRISMAS Y PIRAMIDES

Las áreas de los prismas y pirámides pueden encontrarse usando la siguiente regla:

Área = suma de las áreas de las caras laterales + áreas de las bases

### Área de los Prismas

**Teorema:** Dado un prisma con las caras laterales rectangulares, si la altura del prisma es  $h$  y las bases tienen área  $B$  y perímetro  $p$ , entonces el área  $S$  se encuentra con la fórmula:

$$S = hp + 2B$$

O bien:

el área lateral de un prisma esta constituida por la suma de las áreas de las caras laterales, las cuales son rectángulos.

El área basal de un prisma es la suma de las áreas de las bases, las cuales son polígonos convexos congruentes entre si; de esta forma:

$$A_B = 2A_b$$

El área total de un prisma esta determinado por la suma del área lateral y del área basal.

$$A_T = A_L + A_B$$

*Nota:* El cubo es un caso particular de los prismas por lo que su área podría averiguarse con la fórmula:

$$A_T = (\text{Número de caras}) \cdot (\text{área de una cara})$$

$$A_T = 6 \cdot l^2.$$

---

---

## Área de las Pirámides

**Teorema:** Dada una pirámide regular con altura inclinada  $l$  y base con área  $B$  y perímetro  $p$ , el área  $S$  se encuentra con la fórmula:

$$S = \frac{1}{2}lp + B$$

O bien:

El área lateral de una pirámide está constituida por la suma de las áreas de las caras laterales, las cuales son triángulos:  $A_L$ .

El área basal de una pirámide es el área de la única base, la cual es un polígono convexo:  $A_B$ .

El área total de una pirámide está determinada por la suma del área lateral y del área basal:

$$A_T = A_L + A_B$$

*Nota:* El tetraedro regular es un caso particular de las pirámides por lo que su área podría averiguarse con la fórmula:

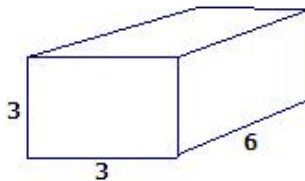
$$A_T = (\text{Número de caras}) \cdot \left(\frac{a_b \cdot a}{2}\right);$$

$$A_T = 4 \cdot \frac{a_b \cdot a}{2};$$

donde  $a_b$  = arista de la base y  $a$  = apotema de la pirámide.

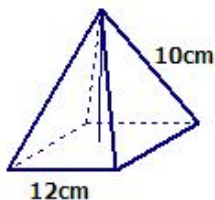
## EJERCICIOS PROPUESTOS

1. De acuerdo con los datos de la figura, ¿cuál es el área total del prisma rectangular recto?

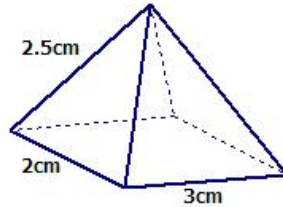


2. ¿Cuál es el área total, en centímetros cuadrados de un prisma de 8 cm de altura y cuya base es un triángulo equilátero de 10cm de lado?
  3. En un prisma recto de base cuadrada, la altura es de 4cm y una de las diagonales del prisma mide 5cm. ¿cuál es el área lateral del prisma?
  4. Si la diagonal de un cubo mide  $7\sqrt{3}$ cm entonces cuánto es la medida de su arista en centímetros.
-

- 
- ¿Cuál es el área total, en centímetros cuadrados de un cubo de 16cm de arista?
  - El área total de un cubo es  $\frac{25}{6}$ , ¿cuál es la medida de la arista del cubo?
  - El área total de un cubo es de  $54\text{cm}^2$ . ¿Cuál es la longitud de cada arista?
  - De acuerdo con los datos de la figura, el área lateral, en metros cuadrados de la pirámide cuadrangular corresponde a



- ¿Cuál es el área lateral de una pirámide recta, de base cuadrada, si el lado de la base mide 10cm y la altura de la pirámide es 12cm?
  - Si la altura de una pirámide es 20cm y su base es un cuadrado de 18cm de lado; entonces, ¿cuál es el área lateral de la pirámide ?
  - ¿Cuál es el área total en centímetros cuadrados de una pirámide regular de base hexagonal, si se sabe que el lado de la base mide 5cm y la apotema de la pirámide mide 4.4cm?
  - Si la base de una pirámide es un hexágono regular de  $6\sqrt{3}\text{cm}$  de apotema y su altura es 15cm, entonces ¿cual es la medida de su arista?
  - Determinar el área total de un prisma hexagonal regular cuyas aristas lateral y basal miden respectivamente  $\sqrt{3}\text{cm}$  y 2cm.
  - Calcular el área total de un prisma recto cuya altura mide 10cm, si la base es un triángulo rectángulo en el cual los catetos miden 3cm y 4cm respectivamente.
  - Si queremos decorar las paredes de una habitación empapelando sus cuatro paredes interiores, menos una puerta de 2m de alto por 1.5m de ancho, ¿ cuántos metros de papel de decoración necesitamos si la habitación es un paralelepípedo rectangular con las siguientes dimensiones:4m de largo, por 3.5m de ancho y 2.5m de alto?.
  - Pablo y su padres construyeron una tienda de campaña de forma de pirámide cuadrangular. La tienda se construyó con piso. Calcular la cantidad de lona que utilizaron si la apotema de la tienda mide 3m y el lado de la base mide 4m.
  - La figura nos muestra una pirámide recta irregular, cuya base es un rectángulo. De acuerdo con las medidas indicadas en dicha figura, ¿cuál es su su área total?
-



18. La arista de un tetraedro regular es  $a=8\text{cm}$ , encuentre su área total.
19. Encuentre el área de una caja sin tapa de  $5\text{cm}$  de longitud,  $3\text{cm}$  de ancho y  $2\text{cm}$  de altura.
20. Encuentrese el área de un prisma recto con bases de triángulos equiláteros si todas las aristas miden  $2\text{cm}$  de longitud.
21. \*La superficie de un prisma con base cuadrada es de  $360\text{cm}^2$  y la altura es el doble de la longitud de las aristas de la base. ¿Cuales son las dimensiones de las aristas de la pirámide?.
22. \*El área de una pirámide con base cuadrada es de  $48\text{cm}^2$ . Si la altura inclinada es igual a la arista de la base, ¿cuál es el área de la base?
23. \* ¿Cuál es la longitud de la altura de la pirámide del ejercicio anterior?
24. \*Si la longitud de cada arista de un prisma se duplica, ¿como cambia el área?
25. \*Se desea cubrir moldes para biscochos de  $20\text{cm}$  de lado por  $6\text{cm}$  de profundidad con un material antiadherente. Si la cantidad disponible de antiadherente cubre  $100$  metros cuadrados, ¿cuántos moldes podrán cubrirse?.

*Nota: Los ejercicios marcados con \* requieren un poco más de esfuerzo, ¡considérelos un reto personal!*

## RESPUESTAS A EJERCICIOS PROPUESTOS

- |                  |                                |
|------------------|--------------------------------|
| 1) 90            | 10) $\approx 789,6$            |
| 2) $326,60$      | 11) $\approx 130,9$            |
| 3) $24\sqrt{2}$  | 12) $19,21$                    |
| 4) $7\text{cm}$  | 13) $24\sqrt{3} \approx 41,56$ |
| 5) $1536$        | 14) $132\text{cm}^2$           |
| 6) $\frac{5}{6}$ | 15) $34,5\text{m}^2$           |
| 7) $\approx 3$   |                                |
| 8) $192$         |                                |
| 9) $\approx 260$ |                                |

---

**16)**  $40m^2$

**17)**  $(6 + \sqrt{21})cm^2$

**18)**  $64\sqrt{3}cm^2$

**19)**  $47cm^2$

**20)**  $12 + \sqrt{3}$

**21)** arista base=6 y arista de la piramide=12

**22)**  $16cm^2$

**23)** altura=4cm

**24)** El área se cuatriplica

**25)** 11

---

---

## VOLÚMENES DE PRISMAS

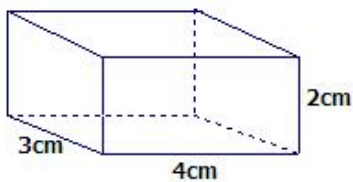
El volumen de un prisma cualquiera es el producto de la longitud de la altura por el área de la base.

$$V_{prisma} = hB;$$

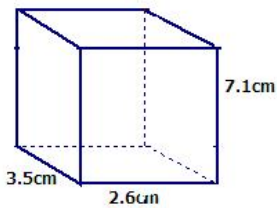
donde h=altura y B=área de la base.

### EJERCICIOS PROPUESTOS

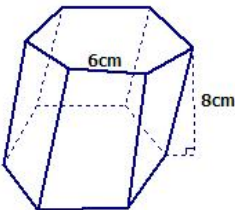
Encuentre el volúmen de las siguientes figuras:



1.

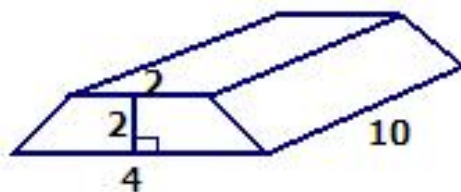


2.



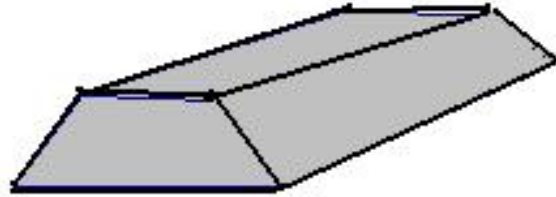
3.

4. La altura de un paralelepípedo rectangular es 7 centímetros y las dimensiones de la base son 4cm y 5 cm. Determine su volumen.
5. Si las longitudes de todos los lados de una caja se duplican, ¿Cuanto aumenta el volumen?
6. Los lingotes de plata son barras moldeadas como la de la figura, Los extremos son trapecios isóceles paralelos. ¿Cuál es el volumen?.

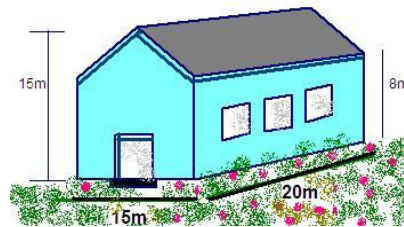




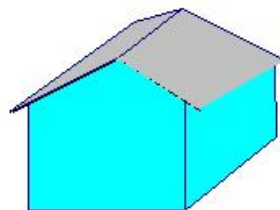
- 
7. A ciertas barras de plata se les da forma de prisma recto cuya base es un trapecio. Las longitudes de las bases del trapecio son 7cm y 10cm. La altura de la barra es de 5cm y su longitud es 30cm. Si la plata pesa  $10\frac{1}{2}$  gramos por centímetro cúbico. ¿Cuánto pesará la barra?



8. Un recipiente rectangular tiene 5cm de ancho y 12 de largo, y contiene agua hasta una profundidad de 7cm. Se mete una piedra y el nivel del agua sube hasta 1.7cm. ¿Cuál es el volumen de la piedra?
9. Un ingeniero necesita encontrar el volumen de una construcción para diseñar un sistema de calefacción. Encuéntrese el volumen de la construcción de la figura.



10. Si un recipiente rectangular con base cuadrada tiene 2m de altura y un volumen de 50m<sup>3</sup> cúbicos, encuéntrese el largo y el ancho de la base.
11. Supóngase que el área de la base de un prisma es  $x$  metros cuadrados y su altura  $2x$  metros: Si el volumen del prisma es 54 metros cúbicos ¿Cuál es la altura?
12. Para calcular el costo de abastecimiento de aire acondicionado de una estructura que se proyecta construir, un contratista tiene que determinar el volumen de aire contenido en un edificio rectangular como el que se presenta en la figura. El edificio tiene 130m de largo y 42m de ancho. A ambos lados del edificio, los aleros están situados a  $9\frac{1}{2}$ m de altura y el punto más alto del techo está a 15m del piso. Determine el volumen del edificio.



13. Carlos cargó en su camión una caja que mide 1,5m de largo, 1,2m de ancho y 1,10m de alto. ¿Cuál es el volumen de la caja?
-

- 
14. Eliécer desea construir una piscina en el patio de su casa. Si las dimensiones de esta son 10m de ancho, 15m de largo y 2m de profundidad, ¿cuántos  $m^3$  de tierra será necesario extraer para su construcción?.
15. Si un centímetro cúbico de hierro pesa 7,20 gramos; ¿cuánto pesará un prisma cuya base es un triángulo que tiene de base 2cm y de altura 1.73cm aproximadamente; y la altura del prisma es 10cm?
16. Danilo hace huecos para tanques sépticos, por contrato cobra 6000 colones el metro cúbico. Hizo un hueco de 2m de largo; 1,5m de ancho y 1,2m de hondo. ¿Cuánto se ganó?
17. Oscar hizo un depósito de forma de cubo para almacenar granos. Mide 12m de arista. ¿Cuál es el volumen?.
18. Alexander, es el dueño de la pulpería, quiere construir un cubo para depósito de alimentos de 90cm de arista. ¿Cuál es el volumen en centímetros cúbicos?.
19. Un cubo mide 1,3m de arista. ¿Cuál es su volumen?
20. Un cubo mide 35cm de arista. ¿Cuál es su volumen?
21. Hallar el volumen de una maleta cuyas dimensiones son 9cm, 24cm y 35cm.
22. Las piezas cúbicas de un rompecabezas de 1cm de arista se colocan en cajas cúbicas de 7cm de arista. ¿Cuántas piezas caben en la caja?; ¿Qué volumen ocupan?.
23. Para forrar un cubo se han utilizado  $0,96m^2$  de papel. ¿Cuál es el volumen del cubo en centímetros cúbicos?
24. Para regar un campo se ha construido un depósito cuya forma es un prisma regular pentagonal. Si la base tiene un área de  $20m^2$  y su altura mide 50m. ¿Cuántos litros de agua puede almacenar?
25. Un juego de construcciones de nueve piezas macisas tiene: 2 prismas cuya base es un triángulo equilátero con una medida de 6cm cada lado; 4 prismas hexagonales regulares, cuya medida del lado de la base es 3cm y 3 prismas cuadrangulares de 4cm de longitud en el lado de la base. La altura de cada pieza es la misma, 12cm de longitud. ¿Cuál es el volumen de madera gastado en la construcción de este juego?.
26. Una pirámide tiene de base un triángulo equilátero cuyo lado tiene una longitud de 4dm. La altura de la pirámide mide 10dm. ¿Cuál es su volumen?.
27. Una caja cúbica de cartón tiene de arista 7cm:
- A** ¿Cuánto cartón contiene su elaboración?
- B** ¿Qué volumen ocupa?
28. Necesitamos construir una caja con su tapadera, de base rectangular cuyas dimensiones son: 2cm de ancho por 30cm de largo y 10cm de altura:
- A** ¿Cuánta cartulina se necesita?
- B** ¿Qué capacidad tiene la caja?
-

- 
29. Si el tunel de descenso de una mina es un prisma de base cuadrada, en el cual el lado de la base mide 2m y la altura mide 10m. ¿Cuál es el volumen de dicho tunel?
30. Un depósito en forma de prisma recto tiene una capacidad de 1 080 000 litros . Sabiendo que la base inferior es un cuadrado cuya diagonal mide 12cm, calcular la altura del depósito.
31. Una piscina infantil, en forma de prisma hexagonal regular tiene una altura de 0,5m y la apotema de su base mide  $\sqrt{3}m$ . Sabiendo que el agua que contiene equivale a  $\frac{2}{3}$  de su capacidad, ¿Cuántos litros de agua contiene la piscina?
-

---

## RESPUESTAS A EJERCICIOS PROPUESTOS

- |                                             |                                     |                                          |
|---------------------------------------------|-------------------------------------|------------------------------------------|
| <b>1)</b> $24cm^3$                          | <b>11)</b> $3\sqrt{3} \approx 5,19$ | <b>21)</b> $7560cm^3$                    |
| <b>2)</b> $64,61cm^3$                       | <b>12)</b> $61880m^3$               | <b>22)</b> 343 piezas y $343cm^3$        |
| <b>3)</b> $432\sqrt{3} \approx 748,25$      | <b>13)</b> $1,98m^3$                | <b>23)</b> $64000cm^3$                   |
| <b>4)</b> $140cm^3$                         | <b>14)</b> $300m^3$                 | <b>24)</b> $10^6l$                       |
| <b>5)</b> 8 veces                           | <b>15)</b> 124,56gramos             | <b>25)</b> $(846\sqrt{3} + 576)cm^3$     |
| <b>6)</b> $\frac{26775}{2} \approx 13387,5$ | <b>16)</b> 21600colones             | <b>26)</b> $\frac{40}{3}\sqrt{3}dm^3$    |
| <b>7)</b> 60                                | <b>17)</b> $1728m^3$                | <b>27)</b> A= $294cm^2$ y B= $343cm^3$   |
| <b>8)</b> $102cm^3$                         | <b>18)</b> $729000cm^3$             | <b>28)</b> A= $2200cm^2$ y B= 6l         |
| <b>9)</b> $3100m^3$                         | <b>19)</b> $2,197m^3$               | <b>29)</b> A= $40m^2$                    |
| <b>10)</b> 5m                               | <b>20)</b> $42875cm^3$              | <b>30)</b> 15m                           |
|                                             |                                     | <b>31)</b> $2000\sqrt{3}l \approx 3464l$ |
-

# Bibliografía

- [1] Clemens, Stanley. Geometría.
- [2] Moise, Edwin y Downs Floyd . Geometría Moderna.
- [3] MEP-ICER. Matemática 2
- [4] Menesses, Roxana. Matemática Enseñanza Aprendizaje 11°.
- [5] Menesses, Roxana. Matemática Enseñanza Aprendizaje 10°.
- [6] Rodriguez, Alexander. Matemática para Bachillerato, Recopilación de Ejercicios.