16 Técnicas de recuento

1. Permutaciones con repetición.

a) Supón que tienes que escribir todos los números de seis cifras y que constan exactamente de cuatro doses y dos unos. ¿Cuántos puedes formar?

b) ¿De cuántas maneras pueden salir seis caras y cuatro cruces al lanzar diez monedas al aire?

c) ¿De cuántas formas puedes reordenar el número 11 223 variando solo el orden de las cifras?

Todos estos casos son ejemplos de permutaciones con repetición. Si tenemos un conjunto de m elementos de los cuales n_1 son de una clase, n_2 de otra, ... y n_h de otra (esto es, $n_1 + n_2 + ... + n_h = m$), llamamos permutaciones con repetición de los m elementos con índices de repetición $n_1, n_2, ..., n_h$ a los distintos grupos que se pueden formar con n_1 elementos de la primera clase, n_2 de la segunda, ... y n_h de la última, de tal forma que dos grupos son diferentes si difieren en la ordenación de dichos elementos.

d) Escribe una fórmula que dé el número de permutaciones con repetición.

2. Aplicando lo que has aprendido en la anterior actividad, resuelve el siguiente problema: ¿Cuántas quinielas diferentes se deben rellenar para estar seguros de acertar los quince resultados si, no se sabe por qué causa, conocemos previamente que se van a producir 7 unos, 6 equis y 2 doses?

3. a) Simplifica la siguiente expresión en la que intervienen números factoriales: $\dfrac{(n+2)!\,(n+3)}{(n+1)! + (n+2)!}$

b) Comprueba la siguiente igualdad: $4\,V_{n,3} + V_{n,4} = P_4 \cdot C_{n+1,4}$

4. Resuelve esta ecuación: $\dfrac{(n+1)! - 22(n-1)!}{n!} = 10$

5. Consideremos todos los números diferentes que se pueden formar con las cifras 1, 3, 5 y 7 de tal forma que estén todas ellas y ninguna se repita.

a) ¿Cuántos números diferentes hay?

b) ¿Cuántos de ellos acaban en 1? ¿Cuántos en 3? ¿Cuántos en 5? ¿Y en 7?

c) ¿Cuánto suman las unidades de todos los números formados? ¿Y las decenas? ¿Y las centenas? ¿Y las unidades de millar?

d) ¿Cuánto suman todos los números formados?

6. Calcula cuántos modelos de billete de tren se pueden imprimir para un trayecto ferroviario con 8 estaciones si:

a) En el billete consta solo entre qué estaciones viaja el pasajero, sin especificar cuál es la ciudad de origen y cuál la de destino del viajero.

b) En el billete figura primero la ciudad de salida, y en segundo lugar la de llegada.

7. El resultado de un partido de fútbol fue 3 a 2 a favor del equipo local. ¿De cuántas formas pudo llegarse a este resultado según el orden en que se fueron marcando los goles?

8. Resuelve la ecuación $V_{x,3} = 24C_{x-2,2}$.

9. Simplifica la expresión $\dfrac{(n-1)!\,(n+m)!}{n!\,(n+m-1)!}$.

10. Dispones de una moneda de 2 euros, una de 1 euro, una de 50 céntimos, una de 20 céntimos y una de 10 céntimos.

a) ¿Cuál es la mayor cantidad de dinero que le puedes dar a tu hermano si le das solo 3 monedas? ¿Cuál es la menor?

b) ¿Cuántas cantidades distintas puedes formar usando solo 3 monedas?

SOLUCIONES

1. a) De los seis espacios disponibles para las cifras, se deben escoger dos para ubicar los unos. Por tanto:

$$C_{6,\,2} = \frac{V_{6,\,2}}{P_2} = 15$$

b) $C_{10,\,4} = 210$

c) $C_{5,\,2} \cdot C_{3,\,2} = 10 \cdot 3 = 30$

d) $P_m^{n_1,\,n_2,\,\dots\,n_h} = \dfrac{m!}{n_1!\ n_2!\ \dots\ n_h!}$

2. $P_{15}^{7,\,6,\,2} = \dfrac{15!}{7!\ 6!\ 2!} = 180\,180$

3. a) $\dfrac{(n+2)!(n+3)}{(n+1)! + (n+2)!} =$

$= \dfrac{(n+1)!(n+2)(n+3)}{(n+1)! + (n+1)!(n+2)} =$

$= \dfrac{(n+1)!(n+2)(n+3)}{(n+1)!(1+n+2)} = n + 2$

b) $4\ V_{n,\,3} + V_{n,\,4} = 4n(n-1)(n-2) +$
$+ n(n-1)(n-2)(n-3) =$
$= n(n-1)(n-2)(4+n-3)$

$P_4 \cdot C_{n+1,\,4} = 24\ \dfrac{(n+1)n(n-1)(n-2)}{24} =$
$= (n+1)n(n-1)(n-2)$

4. $\dfrac{(n+1)! - 22(n-1)!}{n!} = 10$

$(n+1)n - 22 = 10n$

$n^2 - 9n - 22 = 0$

$n = 11$ ($n = -2$ no tiene sentido)

5. a) $P_4 = 24$

b) 6 acaban en 1; 6 acaban en 3; 6 acaban en 5; 6 acaban en 7.

c) La suma de las unidades será:
$6(1 + 3 + 5 + 7) = 6 \cdot 16 = 96$
Por otra parte, será la misma que la de las decenas, las centenas y las unidades de millar.

d) $96(1 + 10 + 100 + 1\,000) = 96 \cdot 1\,111 =$
$= 106\,656$

6. Cada dos estaciones diferentes generan un tipo de billete, sin importar el orden en que se colocan los nombres de las ciudades, luego hay:

$C_{8,\,2} = \dfrac{8 \cdot 7}{2} = 28$ modelos de billete

En este caso sí importa el orden en que se colocan las ciudades de salida y de llegada, luego hay $V_{8,\,2} = 8 \cdot 7 = 56$ modelos de billete.

7. El primer gol lo puede haber metido el equipo de casa o el visitante, el segundo igual, y así sucesivamente. Luego los goles se pudieron marcar de $VR_{2,\,5} = 2^5 = 32$ maneras.

8. $V_{x,\,3} = 24\ C_{x-2,\,2}$

$x(x-1)(x-2) = \dfrac{24(x-2)(x-3)}{2}$

$x(x-1) = 12(x-3)$

$x^2 - 13x + 36 = 0$

$x = 9,\ x = 4$

9. $\dfrac{(n-1)!(n+m)!}{n!\,(n+m-1)!} =$

$= \dfrac{(n-1)!\,(n+m)\cdot(n+m-1)!}{n\,(n-1)!\,(n+m-1)!} = \dfrac{n+m}{n}$

10. a) 3,50 euros; 80 céntimos.

b) $C_{6,\,3} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 20$ cantidades

16 Técnicas de recuento

CRITERIOS	ACTIVIDADES
A. Resolver situaciones relacionadas con el recuento de diferentes posibilidades mediante la utilización del diagrama en árbol.	1. Utiliza un diagrama en árbol para construir todas las palabras, con sentido o sin él, que se pueden formar con las cuatro letras de PALO. Ten en cuenta que en cada una de ellas deben aparecer las cuatro letras y sin que se repita ninguna. a) ¿Cuántas palabras se pueden formar? b) ¿Cuántas empiezan por *P*? ¿Cuántas acaban por *L*? c) ¿Cuántas palabras se pueden formar de tal manera que no haya dos consonantes seguidas?
B. Resolver situaciones relacionadas con el recuento de diferentes posibilidades mediante la utilización, según convenga, de variaciones ordinarias, variaciones con repetición, combinaciones ordinarias o permutaciones ordinarias.	2. Con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9: a) ¿Cuántos números distintos de cinco cifras, sin que se pueda repetir ninguna de ellas, puedes formar? De ellos, ¿cuántos acaban en 79? b) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas puedes formar? De ellos, ¿cuántos acaban en 79? c) ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar, pudiéndose repetir alguna o algunas de ellas? De ellos, ¿cuántos acaban en 79? 3. Con los colores rojo, verde, amarillo, azul, violeta y marrón, ¿cuántas mezclas de tres colores diferentes se pueden hacer?, ¿cuántas en las que intervenga el color violeta?, ¿cuántas en las que intervenga el color violeta pero no el azul? 4. a) ¿Cuántas rectas pueden trazarse de forma que cada una pase por dos vértices de un hexágono regular? b) ¿Cuántas diagonales tiene? ¿Y un polígono de 10 lados?
C. Resolver ecuaciones y situaciones de tipo algebraico en las que intervengan los números factoriales, así como las combinaciones, variaciones y permutaciones.	5. Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{n!}{n! + (n+1)!}$ 6. Resuelve la ecuación: $V_{n,2} + V_{n-2,2} + V_{n-4,2} = 98$

SOLUCIONES

1. a) Se pueden formar 24 palabras diferentes.

b) 6 empiezan por *P* y 6 acaban por *L*.

c) Hay 12 palabras en las que las dos consonantes están separadas.

2. a) $P_5 = 120$ números diferentes. De ellos, $P_3 = 6$ acaban en 79.

b) $V_{5,4} = 120$ números diferentes. De ellos, $V_{3,2} = 6$ acaban en 79.

c) $VR_{5,4} = 625$ números diferentes. De ellos, $VR_{5,2} = 25$ acaban en 79.

3. Habrá $C_{6,3} = 20$ mezclas diferentes. En $C_{5,2} = 10$ de ellas entrará el color violeta y en $C_{4,2} = 6$ entrará el violeta y no entrará el azul.

4. a) Podrán trazarse $C_{6,2} = 15$ rectas diferentes.

b) De estas 15 rectas, 6 corresponderán a los lados. Por tanto, habrá 9 diagonales. En un polígono de 10 lados habrá:

$C_{10,2} - 10 = 45 - 10 = 35$ diagonales

5. $$\frac{n!}{n! + (n+1)!} = \frac{n!}{n! + (n+1)n!} = \frac{n!}{n!(1 + n + 1)} = \frac{1}{n+2}$$

6. $V_{n,2} + V_{n-2,2} + V_{n-4,2} = 98$

$n(n-1) + (n-2)(n-3) + (n-4)(n-5) = 98$

$n^2 - 5n - 24 = 0$

$n = 8$ ($n = -3$ sin sentido)

16 Técnicas de recuento

Nombre: .... Grupo .... Fecha ....../....../......

1. Utiliza un diagrama en árbol para construir todas las palabras, con sentido o sin él, que se pueden formar con las cuatro letras de PALO. Ten en cuenta que en cada una de ellas deben aparecer las cuatro letras y sin que se repita ninguna.

a) ¿Cuántas palabras se pueden formar?

b) ¿Cuántas empiezan por *P*? ¿Cuántas acaban por *L*?

c) ¿Cuántas palabras se pueden formar de tal manera que no haya dos consonantes seguidas?

2. Con las cifras 1, 3, 5, 7 y 9:

a) ¿Cuántos números distintos de cinco cifras, sin que se pueda repetir ninguna de ellas, puedes formar? De ellos, ¿cuántos acaban en 79?

b) ¿Cuántos números de cuatro cifras distintas puedes formar? De ellos, ¿cuántos acaban en 79?

c) ¿Cuántos números de cuatro cifras se pueden formar, pudiéndose repetir alguna o algunas de ellas? De ellos, ¿cuántos acaban en 79?

3. Con los colores rojo, verde, amarillo, azul, violeta y marrón, ¿cuántas mezclas de tres colores diferentes se pueden hacer?, ¿cuántas en las que intervenga el color violeta?, ¿cuántas en las que intervenga el color violeta pero no el azul?

4. a) ¿Cuántas rectas pueden trazarse de forma que cada una pase por dos vértices de un hexágono regular?

b) ¿Cuántas diagonales tiene? ¿Y un polígono de 10 lados?

5. Simplifica la siguiente expresión: $\dfrac{n!}{n! + (n+1)!}$

6. Resuelve la ecuación: $V_{n,\,2} + V_{n-2,\,2} + V_{n-4,\,2} = 98$

16 Técnicas de recuento

1. Construye todas las palabras que se pueden formar con las cuatro primeras letras del abecedario, de tal forma que en cada grupo aparezcan las cuatro y ninguna de ellas se repita.

2. Utilizando un diagrama o esquema, escribe todas las mezclas de tres colores que se pueden formar a partir del rojo, verde, amarillo y blanco.

3. El sistema de numeración binario utiliza únicamente los dígitos 0 y 1 para escribir todos los números.

a) ¿Cuántos números de cinco cifras se pueden escribir en el sistema binario? Ten en cuenta que un número nunca empieza por 0.

b) De ellos, ¿cuántos tienen 3 unos y 2 ceros? Escríbelos.

c) ¿Cuántos se pueden formar de manera que no haya dos cifras iguales seguidas?

4. ¿De cuántas formas pueden sentarse seis personas en un banco de seis plazas? ¿Y las mismas seis personas pero en un banco de siete plazas?

5. El profesor de Cultura Clásica ha anunciado un examen en el que entran siete temas y ha informado de que pedirá el desarrollo por escrito de tres de ellos, elegidos al azar. ¿Cuántos exámenes diferentes pueden caer? ¿En cuántos de ellos entrará el último tema?

6. ¿De cuántas formas se puede nombrar al delegado, primer subdelegado y segundo subdelegado de una clase de 30 alumnos?

7. Simplifica las expresiones:

a) $\dfrac{12! \cdot 7!}{9! \cdot 10!}$

b) $\dfrac{10!(n+1)!}{9! \cdot n!}$

8. Resuelve las ecuaciones:

a) $V_{x,2} - 6(x-2) = 0$

b) $\dfrac{2\, V_{x,3}}{C_{x,2}} = 3x$

9. ¿Cuántos números capicúas de cinco cifras se pueden formar con los dígitos impares?

10. Una chica tiene en su armario 4 camisetas, 5 pantalones y 3 pares de botas. ¿De cuántas formas diferentes puede salir a la calle vistiendo una camiseta, unos pantalones y unas botas?

SOLUCIONES

1. *ABCD* *ABDC* *ACBD* *ACDB* *ADBC* *ADCB*
BACD *BADC* *BCAD* *BCDA* *BDAC* *BDCA*
CABD *CADB* *CBAD* *CBDA* *CDAB* *CDBA*
DABC *DACB* *DBAC* *DBCA* *DCAB* *DCBA*

2. En este caso no influye el orden y, por tanto, las únicas posibilidades son:

RVA *RVB* *RAB* *VAB*

3. a) Ya que la primera cifra debe ser un uno, en realidad nos interesa el número de colecciones que se pueden formar con cuatro cifras.

Por tanto:

$VR_{2,\,4} = 2^4 = 16$

b) 11100 11010 11001
10110 10101 10011

c) La única posibilidad es 10101.

4. En un banco de seis plazas:

$P_6 = 6! = 720$ formas diferentes

En el caso de que fuera un banco de 7 plazas, deberíamos elegir una de ellas para que quedara vacía. Por tanto:

$7 \cdot P_6 = 7 \cdot 6! = 5\,040$ formas diferentes

5. Podrán caer $C_{7,\,3} = 35$ exámenes diferentes.

Podemos contar los exámenes en los que no entra el último tema; serán $C_{6,\,3} = 20$.

Por tanto, habrá 15 exámenes en los que entre el último tema.

6. De los 30 alumnos, se deben elegir 3. En este caso influye el orden, dado que los cargos son diferentes. Por tanto, habrá:

$V_{30,\,3} = 24\,360$ posibilidades diferentes

7. a) $\dfrac{12! \cdot 7!}{9! \cdot 10!} = \dfrac{12 \cdot 11}{9 \cdot 8} = \dfrac{11}{6}$

b) $\dfrac{10!(n+1)!}{9! \cdot n!} = \dfrac{10 \cdot 9!(n+1)\,n!}{9! \cdot n!} =$

$= 10n + 10$

8. a) $V_{x,\,2} - 6(x-2) = 0$

$x(x-1) - 6x + 12 = 0$

$x^2 - 7x + 12 = 0$

$x = 4 \quad x = 3$

b) $\dfrac{2\ V_{x,\,3}}{C_{x,\,2}} = 3x$

$\dfrac{2 \cdot 2x(x-1)(x-2)}{x(x-1)} = 3x$

$x = 8$

9. En los números capicúas de cinco cifras, las decenas y las unidades son fijas, dependiendo de las cifras que hayamos colocado en primero y segundo lugar, luego con los dígitos impares $\{1, 3, 5, 7, 9\}$ existen:

$5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 1 \cdot 1 = 125$ números

10. $4 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ formas

18 Técnicas de recuento

1. En una fiesta coinciden 6 chicos y 7 chicas; si bailan todos con todas, ¿cuántas parejas distintas se han formado?

2. Si permutamos las letras de la palabra PIANO, ¿cuántas de esas permutaciones acaban en vocal?

3. Averigua de cuántas maneras diferentes pueden escribirse las letras de las palabras:

a) FLOR b) ROSA c) CLAVEL

En los tres casos, escribe la primera y la última en orden alfabético.

4. Calcula:

a) $\dfrac{(15-3)!}{(12-2)!}$ b) $4! \cdot 3!$ c) $\dfrac{100!}{97!}$

5. Calcula: a) $6! \cdot \dfrac{3!}{8!}$; b) $\dfrac{12!}{8! \cdot 4!}$

6. a) ¿Cuántos códigos de 4 letras pueden formarse sin repetir ninguna de las 26 letras del abecedario?

b) ¿Cuántos de estos códigos tienen exactamente una vocal?

7. En la Liga Nacional de Fútbol hay 20 equipos en primera división. ¿Cuántos partidos se juegan en cada liga? (Recuerda que cada equipo juega contra los demás dos partidos, uno en casa y otro fuera.)

8. ¿Cuántos números capicúas hay de 6 cifras?

9. ¿Cuántos números positivos y menores que 1 000 pueden formarse con los dígitos 0, 2, 4, 6 y 8?

10. Comprueba que: a) $\dbinom{12}{3} = \dbinom{12}{9}$; b) $\dbinom{15}{4} + \dbinom{15}{5} = \dbinom{16}{5}$

11. ¿Cuántas apuestas distintas pueden hacerse en la lotería primitiva?

12. ¿Cuántas diagonales tiene un decágono?

13. ¿Cuántos grupos de 4 cartas pueden formarse con una baraja española?

14. Resuelve la ecuación $P_n = 132 \cdot P_{n-2}$

15. Resuelve la ecuación: $\dbinom{m}{5} = 2\dbinom{m}{4}$

SOLUCIONES

1. Aplicando el principio de multiplicación, $6 \cdot 7 = 42$ parejas.

2. El número de permutaciones es $P_5 = 5! = 120$.

Como hay 5 terminaciones posibles, cada una de las letras será última en 24 de esas permutaciones. Por tanto, habrá $3 \cdot 24 = 72$ permutaciones que terminen en vocal.

3. a) $P_4 = 4! = 24$. FLOR y ROLF.

b) $P_4 = 4! = 24$. AORS y RSOA.

c) Observa que la L está dos veces y cada vez que se intercambia L por L no cambia nada. Así, la permutación CLAVE*L* = C*L*AVEL, y L*L*AVEC = = *L*LAVEC; en ambos casos hemos escrito en cursiva una de las L, pero en realidad no es así. Por tanto, cada dos permutaciones son una palabra distinta de 6 letras. Su número será:

$$\frac{P_6}{2} = \frac{6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1}{2} = 360.$$

4. a) 132; b) 144; c) 970 200

5. a) $\frac{3}{28}$; b) 495

6. a) Es un problema de variaciones sin repetición:

$V_{26,4} = 26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23 = 358\,800$.

b) En cada grupo de 4 letras habrá una vocal y 3 consonantes. La vocal puede ocupar las 4 posiciones posibles. Las 21 consonantes tendrán que situarse, tomadas de 3 en 3, en las tres posiciones libres restantes.

En total se tendrá:

5 (vocales) · 4 (posiciones que puede tomar cada vocal) · $V_{21,3} = 5 \cdot 4 \cdot 21 \cdot 20 \cdot 19 = 159\,600$.

7. Aquí importa el orden, pues no es lo mismo jugar en casa que fuera. Por tanto, se trata de un problema de variaciones de 20 equipos tomados 2 a 2. Su número será $V_{20,2} = 20 \cdot 19 = 380$.

8. Son números de la forma *abccba*: Por ejemplo, 805 508.

Observa que fijadas las tres primeras cifras, solo hay una posibilidad para las otras tres. Por consiguiente, hay tantos capicúas como números de tres cifras: 1 000. O lo que es lo mismo: $VR_{10,3}$.

9. Algunos de esos números son: 240, 222, 008, ... Esto es, números de tres cifras (para que sean menores que 1 000), y pueden repetirse. Por tanto, es un problema de variaciones con repetición de 5 dígitos tomados de 3 en 3: $VR_{5,3} = 53 = 125$.

10. a) $\binom{12}{3} = 220$; $\binom{12}{9} = 220$

b) $\binom{15}{4} + \binom{15}{5} = 4\,368$ $\binom{16}{5} = 4\,368$.

11. En la lotería primitiva intervienen 49 bolas, numeradas del 1 al 49. Cada apuesta consta de 6 números distintos, que pueden escogerse en cualquier orden sin que cambie la apuesta. Por tanto, se trata de un problema de combinaciones de 49 elementos tomados de 6 en 6.

Su número es:

$$C_{49,6} = \binom{49}{6} = 13\,983\,816$$

12. Desde cada uno de los 10 vértices pueden trazarse 7 diagonales. (Un vértice no genera diagonal ni con sí mismo ni con los vértices adyacentes.) Por tanto, inicialmente se podrían trazar $10 \cdot 7 = 70$ diagonales, pero como la diagonal, pongamos *AD*, es la misma que la *DA*, habrá que dividir 70 entre 2. Así pues, el número de diagonales de un decágono es 35.

13. Recibidas 4 cartas, lo que importa son las cartas en sí, no el orden en el que vienen dadas. Así, por ejemplo, la baza «as de bastos, 7 de copas, sota de oros y 3 de espadas» es igual a la baza «7 de copas, as de bastos, 3 de espadas y sota de oros». Por tanto, se trata de un problema de combinaciones.

El número de bazas, de grupos, será:

$$C_{40,4} = \binom{40}{4} = \frac{40!}{4! \cdot 36!} = \frac{40 \cdot 39 \cdot 38 \cdot 37}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 93\,860$$

14. $n(n-1)(n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 = 132 \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \Rightarrow$ $\Rightarrow n(n-1) = 132 \Rightarrow n^2 - n - 132 = 0$.

Resolviendo la última ecuación se tiene $n = 12$. (La solución $n = -11$ no es válida.)

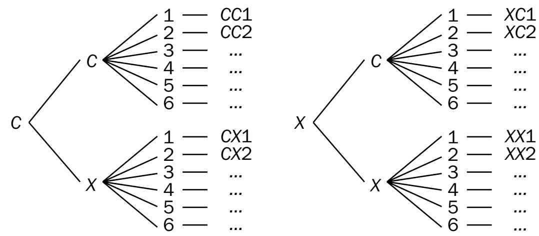
15. $\binom{m}{5} = 2\binom{m}{4} \Rightarrow m = 14$

18 Técnicas de recuento

CRITERIOS	ACTIVIDADES
A. Hacer recuento de tareas sucesivas aplicando el principio de multiplicación.	1. Se lanzan dos monedas y un dado. a) Forma el diagrama en árbol con todas las posibilidades. b) ¿Cuántos resultados se obtienen? 2. Un chico tiene 6 camisas, 4 pantalones y 3 pares de zapatos. ¿De cuántas maneras diferentes puede vestirse con camisa, pantalón y zapatos? 3. Una factoría de automóviles fabrica 3 modelos distintos de coches, con 4 colores diferentes y 2 tipos distintos de acabado interior. ¿Cuántas variedades de coches produce la fábrica?
B. Plantear y resolver problemas en los que sea necesario utilizar permutaciones y calcular su número.	4. Escribe las permutaciones de los números 1, 2 y 3. 5. ¿De cuántas maneras distintas pueden entrar 8 atletas en la meta? 6. ¿De cuántas maneras pueden colocarse en fila 4 libros de Matemáticas, 3 de Química y 2 de Literatura, sin separar los de la misma materia?
C. Plantear y resolver problemas en los que sea necesario utilizar variaciones ordinarias y con repetición y calcular su número.	7. Con ayuda de un diagrama en árbol, escribe las variaciones de las vocales tomadas dos a dos. 8. a) ¿Cuántos números distintos, de cuatro cifras cada uno, pueden formarse con los dígitos 1, 2, 3, 4, 5 y 6? Indica el mayor y el menor. b) ¿Y si no se pueden repetir cifras? Indica también en este caso el menor y el mayor. 9. En una clase de 24 alumnos se hacen elecciones para elegir delegado, subdelegado y secretario. ¿Entre cuántas ternas posibles se puede elegir? (Indicación: piensa si esos cargos son intercambiables.)
D. Plantear y resolver problemas en los que sea necesario utilizar combinaciones sin repetición y calcular su número.	10. Tenemos siete botes de pintura de distinto color. ¿Cuántos nuevos colores podemos obtener mezclando la pintura de tres botes en la misma proporción? 11. ¿Cuántos triángulos pueden formarse con 10 puntos no alineados en grupos de 3 o más puntos? 12. El profesor de Literatura pide leer 3 libros de una lista de 8. ¿Cuántos grupos de libros diferentes pueden leerse?
E. Operar con números factoriales y con números combinatorios.	13. Calcula: a) $7 \cdot 6!$ b) $\frac{7!}{6!}$ c) $\frac{9!}{6!}$ 14. Calcula el valor de los siguientes números combinatorios: a) $\binom{15}{4}$ b) $\binom{6}{4}$ c) $\binom{5}{5}$ d) $\binom{8}{0}$
F. Resolver ecuaciones algebraicas en las que intervengan variaciones, combinaciones y permutaciones.	15. Resuelve las ecuaciones: a) $V_{n,2} = 132$ b) $P_n = 40\,320$ 16. Resuelve las ecuaciones: a) $V_{n,4} = 18 \cdot C_{n,3}$ b) $20 \cdot V_{n,4} = V_{n,6}$

SOLUCIONES

1. a)



b) 2 (1.ª moneda) · 2 (2.ª moneda) · 6 (dado) = 24

2. 6 (camisas) · 4 (pantalones) · 3 (zapatos) = 72

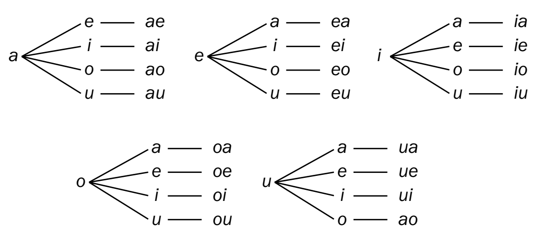
3. 3 (modelos) · 4 (colores) · 2 (acabados) = 24

4. 123 132 213 231 312 321

5. De P_8 maneras distintas. $P_8 = 8! = 40\,320$

6. P_3 (situación de materias) · P_4 (Matemáticas) · · P_3 (Química) · 2 (Literatura) = 6 · 24 · 6 · 2 = = 1 728.

7.



En total, 5 · 4 = 20 grupos de dos vocales.

8. a) Son variaciones con repetición. Su número es: $VR_{6,4} = 6^4 = 1\,296$.

Menor: 1 111. Mayor: 6 666.

b) Son variaciones sin repetición. Su número es: $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$.

Menor: 1 234. Mayor: 6 543.

9. Los cargos no son intercambiables; no es lo mismo ser delegado que subdelegado, por ejemplo. Luego influye el orden en la elección. Por tanto, se trata de un problema de variaciones de 24 alumnos tomados de 3 en 3: $V_{24,3} = 24 \cdot 23 \cdot 22 = 12\,144$.

10. Da igual el orden; por tanto, es un problema de combinaciones:

$$C_{7,3} = \binom{7}{3} = \frac{7!}{3! \cdot (7-3)!} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 4!} = 35$$

11. Tres puntos, en cualquier orden que se den, determinan el mismo triángulo, es pues un problema de combinaciones:

$$C_{10,3} = \binom{10}{3} = \frac{10!}{3! \cdot 7!} = \frac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 120$$

12. La terna ABC es la misma que la ACB, por ejemplo. Por tanto, es un problema de combinaciones. El número es:

$$C_{8,3} = \binom{8}{3} = \frac{8!}{3! \cdot 5!} = \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 5!} = 56$$

13. a) $7 \cdot 6! = 5\,040$;

b) $\dfrac{7!}{6!} = \dfrac{7 \cdot 6!}{6!} = 7$

c) $\dfrac{9!}{6!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6!} = 504$

14. a) $\dbinom{15}{4} = \dfrac{15!}{4! \cdot (15-4)!} = 1\,365$

b) $\dbinom{6}{4} = \dfrac{6!}{4! \cdot (6-4)!} = \dfrac{6 \cdot 5 \cdot 4!}{4! \cdot 2!} = 3 \cdot 5 = 15$

c) $\dbinom{5}{5} = \dfrac{5!}{5! \cdot (5-5)!} = \dfrac{5!}{5! \cdot 0!} = \dfrac{1}{1} = 1$

d) $\dbinom{8}{0} = \dfrac{8!}{0! \cdot (8-0)!} = \dfrac{8!}{0! \cdot 8!} = 1$

15. a) $V_{n,2} = n \cdot (n-1) \Rightarrow n \cdot (n-1) = 132 \Rightarrow$ $\Rightarrow n^2 - n - 132 = 0 \Rightarrow n = 12$. (La solución $n = -11$ no puede tenerse en cuenta.)

b) $P_n = 40\,320 \Rightarrow$
$\Rightarrow n(n-1)(n-2) \cdot \ldots \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

Simplificando la ecuación anterior por 2:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 4 \cdot 3 = 20\,160$

Simplificando la ecuación anterior por 3:

$n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 5 \cdot 4 = 6\,720$

Hay que seguir dividiendo, sucesivamente, por 4, 5, 6, 7, ... hasta que salga 1

Así: $6\,720 : 4 = 1\,680 \longrightarrow 1\,680 : 5 = 336 \longrightarrow$
$\longrightarrow 336 : 6 = 56 \longrightarrow 56 : 7 = 8 \longrightarrow 8 : 8 = 1$

El valor de n es 8 $\longrightarrow$
$\longrightarrow P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

16. a) $n(n-1)(n-2)(n-3) = 18 \cdot \dfrac{n(n-1)(n-2)}{6} \Rightarrow$
$\Rightarrow n - 3 = 3 \Rightarrow n = 6$

b) $20 \cdot n(n-1)(n-2)(n-3) =$
$= n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5) \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 - 9n = 0 \Rightarrow n = 0,\ n = 9$

La solución válida es $n = 9$.

18 Técnicas de recuento

1. El plato del día de un restaurante puede elegirse entre 4 primeros platos, 5 segundos platos y 7 postres. ¿Cuántos menús diferentes pueden confeccionarse?

2. Di cuántas permutaciones hay de los números 1, 2, 3 y 4, y escríbelas todas ordenadamente.

3. En una carrera intervienen 6 caballos. ¿De cuántas maneras diferentes pueden llegar a la línea de meta?

4. ¿De cuántas maneras distintas pueden sentarse 5 personas en un banco alargado?

5. Calcula:

a) $8 \cdot 7!$ b) $\dfrac{17!}{15!}$

6. Con la ayuda de un diagrama en árbol, escribe todas las variaciones de las letras A, B, C, D, tomadas dos a dos.

7. En una urna hay 9 bolas numeradas del 1 al 9. Sacamos dos bolas y anotamos los números en el orden que han salido. Calcula cuántos números de dos cifras pueden formarse si:

a) La segunda bola se extrae sin devolver la primera a la urna.

b) La segunda bola se extrae tras devolver la primera a la urna.

8. Los números de la Lotería Nacional (la que se juega los sábados) son de cinco cifras. ¿Cuántos números se ponen a la venta?

9. a) ¿Cuántos números hay de tres cifras?

b) ¿Y de tres cifras no repetidas?

10. En una liga de baloncesto escolar participan 12 equipos. Si todos juegan contra todos un partido en su campo y otro en el del contrario, ¿cuántos partidos se jugarán? Si cada semana se juegan seis partidos, ¿cuántas semanas durará la liga?

11. ¿Cuántas banderas tricolores horizontales pueden confeccionarse con telas de 7 colores diferentes?

12. Calcula el valor de los siguientes números combinatorios:

a) $\dbinom{9}{6}$ b) $\dbinom{15}{11}$ c) $\dbinom{7}{5}$

13. En un examen hay que contestar 6 preguntas entre 10 propuestas. ¿De cuántas maneras posibles pueden elegirse las 6 preguntas?

14. En un equipo de baloncesto hay 12 jugadores. ¿Cuántos equipos distintos pueden empezar a jugar?

15. Calcula el valor de:

a) $V_{6,4}$

b) $V_{15,7}$

16. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $C_{n,2} = 28$

b) $V_{n,4} = 20 \cdot V_{n,2}$

SOLUCIONES

1. Por el principio de multiplicación:

4 (primeros) · 5 (segundos) · 7 (postres) = 140

2.

1234	1243	1324	1342	1423	1432
2134	2143	2314	2341	2413	2431
3124	3142	3214	3241	3412	3421
4123	4132	4213	4231	4312	4321

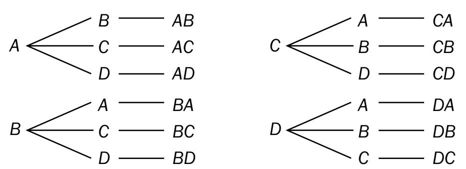
3. $P_6 = 6! = 720.$

4. $P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120.$

5. a) $8 \cdot 7! = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 8! = 40\,320$

b) $\dfrac{17!}{15!} = \dfrac{17 \cdot 16 \cdot 15!}{15!} = 17 \cdot 16 = 272$

6.



En total hay 4 · 3 = 12 variaciones.

7. a) Como influye el orden, se trata de un problema de variaciones ordinarias.

Su número es $V_{9,2} = 9 \cdot 8 = 72.$

b) Como las bolas pueden repetirse, se trata de un problema de variaciones con repetición.

Su número es $VR_{9,2} = 9 \cdot 9 = 81.$

8. Es un problema de variaciones con repetición de 10 dígitos, tomados de 5 en 5.

Su número es: $VR_{10,5} = 10^5 = 100\,000.$

9. a) Cada cifra puede ser uno de los diez dígitos posibles y hay que quitar los números de dos cifras. En total: $VR_{10,3} - VR_{10,2} = 10^3 - 10^2 = 900.$

Los números varían entre 100 y 999.

b) $V_{10,3} - V_{9,2} = 10 \cdot 9 \cdot 8 - 9 \cdot 8 =$
$= 720 - 72 = 648$

10. Si un equipo es *A* y otro *B*, los partidos *A* contra *B* (en el campo de *A*: *AB*) y *B* contra *A* (en el campo de *B*: *BA*) son distintos; luego es un problema de variaciones de 12 equipos tomados de dos en dos: $V_{12,2} = 12 \cdot 11 = 132.$

La liga durará $\dfrac{132}{6} = 22$ semanas.

11. La distinta ordenación de los colores hace variar la bandera, como puede verse.

amarillo
verde
blanco

blanco
amarillo
verde

Por tanto, se trata de un problema de variaciones de 7 telas, tomadas de 3 en 3: $V_{7,3} = 7 \cdot 6 \cdot 5 = 210$ banderas diferentes.

12. a) $\dbinom{9}{6} = \dfrac{9!}{6! \cdot (9-6)!} = \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6!}{6! \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$
$= \dfrac{9 \cdot 8 \cdot 7}{3 \cdot 2} = 84$

b) $\dbinom{15}{11} = \dfrac{15!}{11! \cdot (15-11)!} =$
$= \dfrac{15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11!}{11! \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 15 \cdot 7 \cdot 13 = 1\,365$

c) $\dbinom{7}{5} = \dfrac{7!}{5!(7-5)!} = \dfrac{7 \cdot 6}{2} = 21$

13. Lo que importa son las 6 preguntas elegidas, no el orden en que se eligen o contestan. Por tanto, se trata de un problema de combinaciones de 10 preguntas, elegidas de 6 en 6. Su número es:

$C_{10,6} = \dbinom{10}{6} = \dfrac{10!}{6! \cdot (10-6)!} =$
$= \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 210$

14. Lo que importan son los cinco jugadores elegidos, no el orden en el que son elegidos. Por tanto, se trata de un problema de combinaciones de 12 jugadores tomados de 5 en 5. Su número es:

$C_{12,5} = \dbinom{12}{5} = \dfrac{12!}{5! \cdot 7!} =$
$= \dfrac{12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7!}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 7!} = 11 \cdot 9 \cdot 8 = 792$

15. a) $V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$

b) $V_{15,7} = 15 \cdot 14 \cdot 13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 =$
$= 32\,432\,400$

16. a) $\dbinom{n}{2} = \dfrac{n(n-1)}{2} = 28 \Rightarrow n(n-1) = 56 \Rightarrow$
$\Rightarrow n^2 - n - 56 = 0 \Rightarrow n = 8,\ n = -7.$

La solución válida es $n = 8$.

b) $n(n-1)(n-2)(n-3) = 20n(n-1) \Rightarrow$
$\Rightarrow (n-2)(n-3) = 20 \Rightarrow n^2 - 5n - 14 = 0 \Rightarrow$
$\Rightarrow n = 7,\ n = -2.$

La solución válida es $n = 7$.

18 Técnicas de recuento

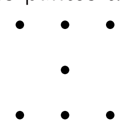
1. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $5 \cdot C_{x,3} = 8 \cdot C_{x-1,4}$ b) $2 \cdot C_{x,4} = 2 \cdot C_{x,3} - C_{x,2}$ c) $18 \cdot C_{x,2} + 24 \cdot C_{x,3} = 125x$

2. El número de variaciones de cierto número de elementos tomados de cinco en cinco es igual que el de variaciones de los mismos elementos tomados de cuatro en cuatro. Halla el número de elementos.

3. Con los números 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, ¿cuántos números de tres cifras se pueden formar que sean mayores que 200 pero menores que 700?

4. ¿Cuántos triángulos se pueden formar uniendo tres puntos a partir de la siguiente figura?



5. Con las letras de la palabra LIBRO, ¿cuántas palabras, de 5 letras distintas, se pueden formar de modo que las vocales no estén juntas?

6. En una clase hay 12 chicas y 14 chicos.

a) ¿Cuántos grupos de cuatro personas se pueden formar?

b) ¿Cuántos si en cada grupo debe haber dos chicas?

c) ¿Cuántos si en cada grupo debe haber por lo menos dos chicas?

7. Se quieren colocar, en una estantería, 4 libros de matemáticas, 3 de historia y 5 de literatura, de manera que los libros de cada disciplina tienen que permanecer juntos. ¿De cuántas formas se puede hacer?

8. Con 15 consonantes y 3 vocales:

a) ¿Cuántas palabras de 5 letras distintas, con o sin sentido, se pueden formar?

b) ¿Cuántas si la letra central tiene que ser consonante?

c) Si suponemos que cada letra está escrita en una bola e introducimos las bolas en una bolsa, ¿cuántos grupos de cinco letras podemos extraer, en una sola extracción de cinco bolas?

9. A una reunión científica internacional asisten 100 personas de las que 50 hablan inglés solamente, 30 hablan solo francés y las 20 restantes hablan ambos idiomas. ¿Cuántos diálogos pueden establecerse sin intérprete?

10. Resuelve la siguiente ecuación:

$$\frac{x \cdot (x^2 + 6)}{6} = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3}$$

SOLUCIONES

1. a) $5 \cdot C_{x,3} = 8 \cdot C_{x-1,4}$ (tiene que ser $x > 4$) $\Leftrightarrow$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 8 \cdot \frac{(x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3) \cdot (x-4)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 5 \cdot x = 2 \cdot (x-3) \cdot (x-4) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 2x^2 - 19x + 24 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x = 8 \left(x = \frac{3}{2} \text{ no es válida} \right)$$

b) $2 \cdot C_{x,4} = 2 \cdot C_{x,3} - C_{x,2}$ ($x > 3$);

$$2 \cdot \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$$

$$= 2 \cdot \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} - \frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{12} =$$

$$= \frac{4 \cdot x \cdot (x-1) \cdot (x-2) - 6x \cdot (x-1)}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot (x-3)}{12} =$$

$$= \frac{x \cdot (x-1) \cdot [4(x-2) - 6]}{12} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (x-2) \cdot (x-3) = 4 \cdot (x-2) - 6 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0 \Leftrightarrow x = 5;\ x = 4$$

c) $8 \cdot C_{x,2} + 24 \cdot C_{x,3} = 125x$ ($x > 2$)

$$18 \cdot \frac{x \cdot (x-1)}{2 \cdot 1} + 24 \cdot \frac{x \cdot (x-1) \cdot (x-2)}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 125x$$

$$x \cdot (x-1) + 4x \cdot (x-1) \cdot (x-2) = 125x$$

$$4x^3 - 3x^2 - 126x = 0$$

$x = 6$, válida; $x = 0$, no válida; $x = -\dfrac{42}{8}$, no válida.

2. $V_{n,5} = V_{n,4}$ ($n > 4$) $\Leftrightarrow V_{n,4} \cdot (n-4) = V_{n,4} \Leftrightarrow$
$\Leftrightarrow n - 4 = 1,\ n = 5$

3. Se trata de variaciones con repetición, ya que importa el orden y las cifras pueden repetirse en un mismo número, pero las condiciones del enunciado hacen que en la posición de las centenas no puedan figurar ni 1 ni 7, por tanto la respuesta es:

$$5 \cdot VR_{7,2} = 5 \cdot 7^2 = 245$$

4. Para formar un triángulo hay que unir tres puntos no alineados, no importando el orden. Se trata de combinaciones. El número de triángulos es:

$$C_{7,3} - \underbrace{5}_{\text{ternas de puntos alineados}} = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{3 \cdot 2 \cdot 1} - 5 = 30$$

5. Para que las vocales no estén juntas, se tiene que dar alguna de las siguientes configuraciones:

V_V__	_V_V_	__V_V	V__V_	_V__V	V___V

Para cada configuración tenemos: $P_2 \cdot P_3 = 12$ palabras. En total hay: $6 \cdot 12 = 72$ palabras.

6. En todos los casos, un grupo no varía al variar el orden. Se trata de combinaciones.

a) $C_{26,4} = \dfrac{26 \cdot 25 \cdot 24 \cdot 23}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 14\,950$ grupos distintos.

b) $C_{12,2} \cdot C_{14,2} = \dfrac{12 \cdot 11}{2 \cdot 1} \cdot \dfrac{14 \cdot 13}{2 \cdot 1} = 66 \cdot 91 =$
$= 6\,006$ grupos distintos.

c) Si por lo menos tiene que haber 2 chicas, entonces puede haber 2, 3 ó 4, por tanto:

$$\underbrace{C_{12,2} \cdot C_{14,2}}_{\text{dos chicas}} + \underbrace{14 \cdot C_{12,3}}_{\text{tres chicas}} + \underbrace{C_{12,4}}_{\text{cuatro chicas}} =$$

$= 6\,006 + 3\,080 + 495 =$
$= 13\,571$ grupos distintos

7. Ordenaciones de libros de matemáticas: $P_4 = 24$
Ordenaciones de libros de historia: $P_3 = 6$
Ordenaciones de libros de literatura: $P_5 = 120$
Ordenaciones de los tres bloques: $P_3 = 6$
Por tanto el número total de ordenaciones de todos los libros en la estantería es:

$$P_3 \cdot P_4 \cdot P_3 \cdot P_5 = 6 \cdot 24 \cdot 6 \cdot 120 = 103\,680$$

8. a) Las palabras son distintas si se altera el orden de las letras. Se trata de variaciones:

$$V_{18,5} = 1\,028\,160$$

b) Las palabras son distintas si se altera el orden de las letras. Se trata de variaciones:

$$15 \cdot V_{17,4} = 856\,809$$

c) No influye el orden. Se trata de combinaciones:

$$C_{18,5} = 8\,568$$

9. Diálogos entre los que solo hablan inglés:

$$C_{50,2} = 1\,225$$

Diálogos entre los que solo hablan francés:

$$C_{30,2} = 435$$

Diálogos entre los que hablan los dos idiomas:

$$C_{20,2} = 190$$

Diálogos entre los que solo hablan un idioma y los bilingües:

$$80 \cdot 20 = 1\,600$$

Total:

$1\,225 + 435 + 190 + 1\,600 = 3\,450$ diálogos

10. $$\frac{x \cdot (x^2 + 6)}{6} = \binom{x}{0} + \binom{x}{1} + \binom{x}{2} + \binom{x}{3}$$

$$\frac{x \cdot (x^2 + 6)}{6} = 1 + x + \frac{x(x-1)}{2} + \frac{x(x-1)(x-2)}{6}$$

$$\frac{x^3 + 6x}{6} = \frac{6 + 6x + 3x^2 - 3x + x^3 - 3x^2 + 2x}{6}$$

$0 = 6 - x$; $x = 6$.

18 Técnicas de recuento

CRITERIOS	ACTIVIDADES
A. Distinguir las situaciones que se pueden asociar a permutaciones, variaciones, con o sin repetición, y combinaciones.	1. Indica, en cada caso, qué concepto hay que utilizar y calcula el número de: a) Números de siete cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2, 3 y 4. b) Cantidades distintas, con tres billetes, que se pueden formar si disponemos de un billete de cada una de las siguientes cantidades: 5 €, 10 €, 20 €, 50 € y 100 €. c) Palabras de 6 letras distintas que se pueden formar a partir de la palabra TEJADO. ¿Cuántas empiezan por J?
B. Aplicar las técnicas y estrategias de recuento para interpretar situaciones problemáticas y dominar el cálculo del número de posibilidades en cada caso.	2. Forma todos los números de tres cifras que se pueden formar con los dígitos 1, 2. 3. Una cafetería ofrece para desayunar dos zumos: naranja o pomelo; tres bebidas calientes: café, infusión o chocolate; y para comer, tostada o churros. Calcula el número de desayunos posibles que incluyan un elemento de cada grupo.
C. Utilizar, de forma racional, los conceptos básicos de la unidad, la relación existente entre ellos y las propiedades de los números combinatorios para resolver ecuaciones y simplificar expresiones.	4. Calcula: a) $\frac{V_{9,4}}{P_4}$ b) $\frac{C_{7,4}}{V_{7,4}}$ 5. Escribe en la forma $V_{n,p}$: a) $37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33$ b) $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$ c) $(m+2)(m+1) \ldots (n+1)\, n(n-1)$ 6. Resuelve: a) $VR_{x,2} - V_{x,2} = -63$ b) $x! = 42(x-2)!$
D. Plantear y resolver problemas diversos de particiones, ordenación y selecciones, mediante las técnicas de recuento.	7. Con 6 colores diferentes, ¿cuántas mezclas se pueden formar, si en cada mezcla intervienen, al menos, dos colores? 8. Un alumno tiene que resolver tres ecuaciones y dos problemas de una selección de 7 de las primeras y 12 de los segundos. ¿De cuántas formas puede hacer la elección? 9. Un número está escrito con cifras diferentes. Con ellas se pueden formar tantos números de dos cifras distintas como productos de tres factores diferentes pueden hacerse usando sus cifras. ¿Cuántas cifras tenía el número que nos dieron?

SOLUCIONES

1. a) Interviene el orden y solo disponemos de 4 dígitos para formar números de siete cifras. Son variaciones con repetición:

$VR_{4,7} = 4^7 = 16\,384$ números

b) No interviene el orden. Son combinaciones:

$$C_{5,3} = \frac{5 \cdot 4 \cdot 3}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 10 \text{ cantidades}$$

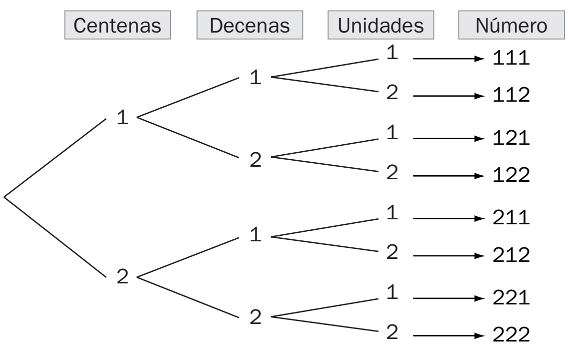
c) Interviene el orden y en cada grupo se utilizan las 6 letras disponibles. Son permutaciones sin repetición:

$P_6 = 720$ palabras

Empiezan por 5:

$P_5 = 120$ palabras

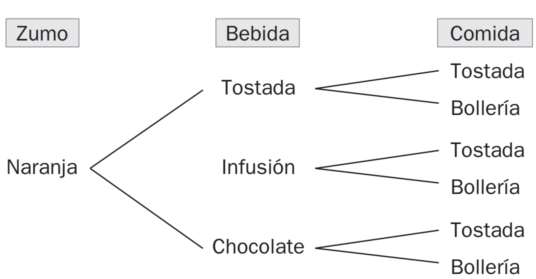
2. Formamos el siguiente diagrama en árbol:



3. Cada zumo se puede combinar con cada una de las tres bebidas y con cada una de las dos comidas; por tanto, el número de desayunos posibles es:

$2 \cdot 3 \cdot 2 = 12$

Veamos el diagrama en árbol para un zumo:



4. a) $$\frac{V_{9,4}}{P_4} = \frac{8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 126$$

b) $$\frac{C_{7,4}}{V_{7,4}} = \frac{\frac{V_{7,4}}{P_4}}{V_{7,4}} = \frac{1}{P_4} = \frac{1}{24}$$

5. a) $37 \cdot 36 \cdot 35 \cdot 34 \cdot 33 = V_{37,5}$

b) $(n-1)(n-2)(n-3)(n-4) = V_{n-1,4}$

c) $(m+2)(m+1)\ \dots\ (n+1)\ n(n-1) =$
$= V_{m+2,\ m-n+4}$

6. a) $VR_{x,2} - 2V_{x,2} = -63;\ x^2 - 2x(x-1) = -63$
$-x^2 + 2x = -63;\ x^2 - 2x - 63 = 0$

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 252}}{2} = \frac{2 \pm 16}{2} = $$
$$= \begin{cases} 9 \\ -7, \text{ solución no válida} \end{cases}$$

b) $x! = 42(x-2)!\ x(x-1)(x-2)! = 42(x-2)!$
$x(x-1) = 42;\ x^2 - x - 42 = 0;$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 168}}{2} = \frac{1 \pm 13}{2} =$$
$$= \begin{cases} 7 \\ -6, \text{ solución no válida} \end{cases}$$

7. No interviene el orden, luego se trata de combinaciones:

$C_{6,2} + C_{6,3} + C_{6,4} + C_{6,5} + C_{6,6} =$
$= 15 + 20 + 15 + 6 + 1 = 57$

Se pueden formar 57 mezclas.

8. Con las 7 ecuaciones puede formar $C_{7,3}$ grupos de 3. Con los 12 problemas puede formar $C_{12,2}$ grupos de 2. Como cada grupo de ecuaciones se puede combinar con cada grupo de problemas, la solución es:

$C_{7,3} \cdot C_{12,2} = 35 \cdot 66 = 2\,310$ posibilidades

9. Números de dos cifras distintas: $V_{n,2}$

Productos de tres cifras distintas: $C_{n,3}$

$$V_{n,2} = C_{n,3};\ n(n-1) = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$$

$n^3 - 9n^2 + 8n = 0,\ n(n^2 - 9n + 8) = 0,\ n = 0,$
$n = 1,\ n = 8$

Las soluciones $n = 0$, $n = 1$ no son válidas. Por tanto, el número de cifras del número inicial es 8.

18 Técnicas de recuento

1. Calcula el valor de las siguientes expresiones:

a) $4!$ b) P_8 c) $5! - P_4$

2. Simplifica las siguientes expresiones:

a) $\dfrac{10!}{2! \cdot 5!}$ b) $\dfrac{4!}{7! - 3!}$ c) $\dfrac{(x-4)!}{P_{(x-6)}}$

3. a) ¿De cuantas formas diferentes pueden colocarse en fila 7 personas?

b) ¿Y si la primera y la última son fijas?

4. Calcula y simplifica:

a) $V_{6,2}$ b) $V_{7,4}$ c) $\dfrac{V_{8,5} - V_{8,2}}{V_{5,2}}$

5. Resuelve la siguiente ecuación: $V_{x,5} = 12 \cdot V_{x,3}$

6. Con las letras de la palabra CUERPO, ¿cuántas palabras de cuatro letras distintas, con o sin sentido, se pueden formar? ¿Cuántas empiezan por *p* y terminan por *e*?

7. Al lanzar un dado 3 veces, ¿cuántos resultados distintos podemos obtener?

8. Resuelve las siguientes ecuaciones:

a) $VR_{x,2} + 4VR_{x+1,2} = 305$

b) $16VR_{x-1,2} = 9VR_{4,3}$

c) $VR_{6,2} + 15VR_{x-3,2} = 171$

9. a) ¿Cuántos números de 5 cifras, repetidas o no, se pueden formar con los dígitos 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8?

b) ¿Cuántos serán múltiplos de 5?

c) ¿Cuántos tienen el 2 en la posición de las unidades y el 7 en la posición de las centenas?

10. Comprueba las siguientes igualdades:

a) $C_{10,6} = C_{10,4}$

b) $\dbinom{11}{4} = \dbinom{11}{7}$

c) $C_{x,x-3} = \dbinom{x}{3}$

11. Se dispone de 10 botes de pintura de diferentes colores. ¿Cuántas mezclas de tres colores se pueden hacer? ¿Y cuántas mezclas se pueden hacer de siete colores?

12. Un examen consta de 25 preguntas, de las que se deben contestar 20.

a) ¿De cuántas formas diferentes se pueden elegir esas 20 preguntas?

b) ¿Y si 15 de ellas son obligatorias?

SOLUCIONES

1. a) $4! = 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 24$

b) $P_8 = 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 40\,320$

c) $5! - P_4 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 - 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 96$

2. a) $\dfrac{10!}{2! \cdot 5!} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5!}{2 \cdot 1 \cdot 5!} = 15\,120$

b) $\dfrac{4!}{7! - 3!} = \dfrac{4 \cdot 3!}{(7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 - 1)3!} = \dfrac{4}{839}$

c) $\dfrac{(x-4)!}{P_{(x-6)}} = \dfrac{(x-4)(x-5)(x-6)!}{(x-6)!} =$
$= (x-4)(x-5) = x^2 - 9x + 20$

3. a) Influye el orden de colocación e intervienen todas las personas en cada ordenación. Se trata de permutaciones de 7 elementos:

$P_7 = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 5\,040$ formas diferentes.

b) Si la primera y la última son fijas, solo hay que cubrir 5 posiciones, con 5 personas, luego:

$P_5 = 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 120$ formas diferentes.

4. a) $V_{6,2} = 6 \cdot 5 = 30$

b) $V_{7,4} = 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 = 840$

c) $\dfrac{V_{8,5} - V_{8,2}}{V_{5,2}} = \dfrac{8 \cdot 7 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 - 8 \cdot 7}{5 \cdot 4} =$
$= \dfrac{56(60-1)}{20} = \dfrac{826}{5}$

5. Debe ser: $V_{x,5} = 12 \cdot V_{x,3}$, con $x \geqslant 5$

$x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) =$
$= 12x(x-1)(x-2)$

$(x-3)(x-4) = 12;\ x^2 - 7x + 12 = 12$

$x^2 - 7x = 0;\ x(x-7) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ x = 7 \end{cases}$

La solución es $x = 7$, porque $x \geqslant 5$.

6. Influye el orden, y no entran todas las letras en cada palabra, sin poder repetirse ninguna letra. Se trata de variaciones sin repetición.

$V_{6,4} = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 = 360$ palabras distintas.

Que empiecen por *p* y terminen por *e*:
$V_{4,2} = 4 \cdot 3 = 12$

7. En cada lanzamiento hay 6 posibles resultados, puede haber repetición y hay que tener en cuenta el orden:

$VR_{6,3} = 6^3 = 216$ resultados distintos.

8. a) $VR_{x,2} + 4VR_{x+1,2} = 305;\ x^2 + 4(x+1)^2 = 305;$
$5x^2 + 8x + 4 = 305;\ 5x^2 + 8x - 301 = 0;$

$$x = \frac{-8 \pm \sqrt{64 + 6\,020}}{10} = \begin{cases} x = 7 \\ x = -\dfrac{43}{5} \end{cases}$$

La solución válida es $x = 7$.

b) $16VR_{x-1,2} = 9VR_{4,3};\ 16(x-1)^2 = 9 \cdot 4^3;$
$(x-1)^2 = 6^2$; solución válida, $x = 7$.

c) $VR_{6,2} + 15VR_{x-3,2} = 171;\ 6^2 + 15(x-3)^2 = 171$
$(x-3)^2 = 9$; solución válida, $x = 6$

9. a) $VR_{7,5} = 7^5 = 16\,807$ números distintos.

b) Son múltiplos de 5 solo los que acaban en 5; por tanto, $VR_{6,4} = 6^4 = 1\,296$.

c) Al fijar los dos números en las dos posiciones, nos quedan 5 números para ocupar tres posiciones, por consiguiente: $VR_{5,3} = 5^3 = 125$

10. a) $\left.\begin{array}{l} C_{10,6} = \dfrac{10!}{(10-6)! \cdot 6!} = \dfrac{10!}{4! \cdot 6!} \\ C_{10,4} = \dfrac{10!}{(10-4)! \cdot 4!} = \dfrac{10!}{6! \cdot 4!} \end{array}\right\} \Rightarrow C_{10,6} = C_{10,4}$

b) $\left.\begin{array}{l} \dbinom{11}{4} = \dfrac{11!}{7! \cdot 4!} \\ \dbinom{11}{7} = \dfrac{11!}{4! \cdot 7!} \end{array}\right\} \Rightarrow \dbinom{11}{4} = \dbinom{11}{7}$

c) $\left.\begin{array}{l} C_{x,x-3} = \dfrac{x!}{[x-(x-3)]! \cdot (x-3)!} = \dfrac{x!}{3! \cdot (x-3)!} \\ \dbinom{x}{3} = \dfrac{x!}{(x-3)! \cdot 3!} \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow C_{x,x-3} = \dbinom{x}{3}$

11. Número de mezclas posibles de tres colores:

$C_{10,3} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8}{3 \cdot 2 \cdot 1} = 120$

Con siete colores, es: $C_{10,7} = C_{10,3} = 120$

12. a) $C_{25,20} = C_{25,5} = \dfrac{25 \cdot 24 \cdot 23 \cdot 22 \cdot 21}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} =$
$= 53\,130$ formas diferentes.

b) Si 15 son fijas, quedan 10 para elegir 5:

$C_{10,5} = \dfrac{10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6}{5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 252$ formas diferentes.