18 Sucesos y probabilidad

1. Se lanzan dos dados cúbicos, calcula la probabilidad de los siguientes sucesos:

A = «Aparece, al menos, un 3».

B = «Aparecen resultados idénticos en ambos dados».

C = «La suma de los puntos obtenidos en ambos dados es 8».

2. ¿Cuál es la probabilidad de obtener la ordenación *OSAC* al colocar, al azar, las letras de la palabra *SACO*?

3. En un club deportivo se sabe que el 40 % de los socios juega al tenis, el 30 % juega al golf y el 10 % practica ambos deportes. Calcula la probabilidad de que elegido un socio al azar:

a) Juegue solamente a tenis o a golf.

b) No practique ninguno de estos dos deportes.

4. La tabla siguiente recoge los resultados obtenidos en 500 lanzamientos de un dado:

Número de lanzamientos	100	200	300	500
Número de veces que aparece el 6	21	47	73	121
Frecuencia relativa				

a) Completa la tabla.

b) ¿Qué probabilidad asignarías al suceso «obtener 6»?

c) ¿Qué opinas sobre el dado utilizado?

5. En una urna hay bolas de distintos colores. Se extrae una bola, se anota el color y se devuelve a la urna. Después de haber repetido el experimento 100 veces, los resultados obtenidos son: 22 bolas blancas, 10 bolas negras y 68 bolas azules.

a) Haz una tabla de frecuencias relativas.

b) Con estos datos, ¿cuál es la probabilidad de obtener bola negra?

c) Si el número total de bolas es 50, ¿cuántas crees que habrá de cada color?

6. En una biblioteca hay 5 225 ejemplares numerados. El bibliotecario quiere seleccionar 5 ejemplares al azar. Con la ayuda de la calculadora simula el experimento aleatorio descrito.

SOLUCIONES

1. El espacio muestral está formado por 36 sucesos elementales que aparecen recogidos en la siguiente tabla:

	1	2	3	4	5	6
1	(1, 1)	(1, 2)	(1, 3)	(1, 4)	(1, 5)	(1,6)
2	(2, 1)	(2, 2)	(2, 3)	(2, 4)	(2, 5)	(2, 6)
3	(3, 1)	(3, 2)	(3, 3)	(3, 4)	(3, 5)	(3, 6)
4	(4, 1)	(4, 2)	(4, 3)	(4, 4)	(4, 5)	(4, 6)
5	(5, 1)	(5, 2)	(5, 3)	(5, 4)	(5, 5)	(5, 6)
6	(6, 1)	(6, 2)	(6, 3)	(6, 4)	(6, 5)	(6, 6)

a) El suceso A está formado por 11 sucesos elementales, son todos aquellos en los que aparece una o dos veces el 3.

$$P(A) = \frac{11}{36}$$

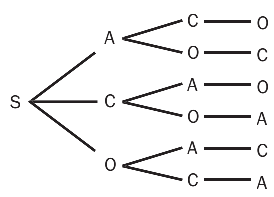
b) El suceso B está formado por los 6 sucesos de la diagonal principal.

$$P(B) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$$

c) El suceso $C = \{(3, 5), (5, 3), (4, 4), (2, 6), (6, 2)\}$.

$$P(C) = \frac{5}{36}$$

2. Consideramos el diagrama de árbol:



De igual forma se procede empezando por A, C u O.

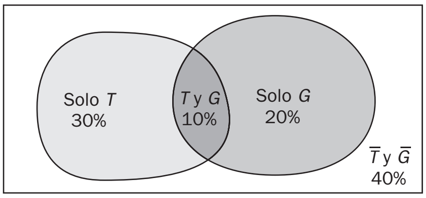
Los casos posibles son $6 \cdot 4 = 24$

Los casos favorables, solo hay uno, la ordenación *OSAC*.

Por tanto la probabilidad pedida es $\frac{1}{24}$.

3. P («Practique sólo tenis o sólo golf») $= 0,5$

P («No practique ni tenis ni golf») $= 0,4$



4. a)

N.º de lanzamientos	100	200	300	500
N.º de veces que aparece el 6	21	47	73	121
Frecuencia relativa	0,21	0,23	0,24	0,24

b) La probabilidad del suceso «obtener 6» es 0,24.

c) La probabilidad teórica del suceso «obtener 6» es $\frac{1}{6} = 0,16$, como la probabilidad experimental es 0,24, el dado está cargado hacia el 6.

5. a)

Bola	B	N	A
Frecuencia relativa	0,22	0,10	0,68

b) $p(N) = 0,10$

c) Hay, aproximadamente, 11 bolas blancas, 5 bolas negras y 34 bolas azules.

6. Se procede de la siguiente forma:

— Se pulsa la tecla RAN# de la calculadora y se obtiene un número decimal comprendido entre 0 y 1, por ejemplo: 0,543.

— Se multiplica dicho número por 5 225, se obtiene un número decimal comprendido entre 0 y 525, en este caso 2 838,175.

— Se suma una unidad al número anterior y se consigue 2 838,175.

— Se desprecia la parte decimal: 2 838.

Si se repite esta secuencia otras cuatro veces, se obtienen cinco números aleatorios entre 1 y 5 225.

18 | Sucesos y probabilidad

CRITERIOS	ACTIVIDADES
A. Obtener el espacio muestral y caracterizar sucesos de distintos experimentos aleatorios.	1. Escribe el espacio muestral de los siguientes experimentos aleatorios: a) Lanzar un dado tetraédrico y una moneda, por este orden. b) Extraer sucesivamente tres bolas de una bolsa que contiene bolas rojas y negras. c) Levantar una ficha, de las 28 del dominó, y leer la suma de puntos. 2. Se lanza un dado octaédrico y se observa el número de la cara sobre la que se apoya. Escribe los sucesos elementales incluidos en los siguientes sucesos: a) «Obtener número par». b) «Obtener número mayor o igual que 5». c) «Un suceso que sea incompatible con el suceso *A*». d) «El suceso contrario de *B*».
B. Distinguir los casos en los que se da equiprobabilidad de aquellos en los que no.	3. En una estantería de un supermercado hay 200 botellas de idéntica forma, pero unas contienen zumo de piña y otras de melocotón. Una persona, con los ojos tapados, coge una botella. En el supuesto de que hay tantas de un tipo como de otro: a) ¿Hay la misma probabilidad de elegir zumo de piña que de melocotón? b) ¿Y si consideramos que hay tres botellas de zumo de piña por cada una de melocotón?
C. Asignar probabilidades a sucesos.	4. Se extrae una carta de una baraja española. Calcula la probabilidad de: a) Obtener una sota. b) Obtener un basto. c) Obtener el rey de bastos. d) Obtener un caballo o una carta del palo de copas. 5. Una encuesta revela que el 35 % de los alumnos que leen el periódico, el 28 % escuchan la radio y el 12 % leen el periódico y escuchan la radio. Elegimos un alumno al azar. Determina: a) La probabilidad de que realice alguna de las dos actividades. b) La probabilidad de que no realice ninguna de las dos actividades. c) La probabilidad de que realice exclusivamente una de las dos actividades. 6. Una máquina fabrica tornillos que se empaquetan en paquetes de 1 000, 2 000 y 5 000. Para determinar la fiabilidad de la máquina se hace una prueba de control, obteniendo los siguientes resultados: <table><tr><td>Tipo de lote</td><td>1 000</td><td>2 000</td><td>5 000</td></tr><tr><td>Número de defectuosos</td><td>17</td><td>40</td><td>68</td></tr></table>Determina la probabilidad de que un tornillo fabricado por dicha máquina sea defectuoso.
D. Simular experiencias aleatorias.	7. Con la ayuda de la calculadora simula la experiencia aleatoria que consiste en el lanzamiento de un dado cúbico.

SOLUCIONES

1. a) $E = \{(1, c), (1, x), (2, c), (2, x), (3, c), (3, x), (4, c), (4, x)\}$

b) $E = \{(R, R, R), (R, R, N), (R, N, R), (N, R, R), (R, N, N), (N, R, N), (N, N, R), (N, N, N)\}$

c) $E = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12\}$

2. a) $A = \{2, 4, 6, 8\}$

b) $B = \{5, 6, 7, 8\}$

c) C: «obtener un número impar» $= \{1, 3, 5, 7\}$

d) $\overline{B}$: «obtener un número menor que 5» $=$
$= \{1, 2, 3, 4\}$

3. a) Como el número de botellas de cada zumo es igual, hay equiprobabilidad ya que:

P(«elegir botella de zumo de piña») $= \dfrac{1}{2}$

P(«elegir botella de zumo de melocotón») $= \dfrac{1}{2}$

b) En este caso no hay equiprobabilidad, ya que:

P(«elegir botella de zumo de piña») $= \dfrac{3}{4}$

P(«elegir botella de zumo de melocotón») $= \dfrac{1}{4}$

4. a) P(«Obtener una sota») $=$

$$= \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$$

b) P(«Obtener bastos») $=$

$$= \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$

c) P(«Obtener rey de bastos») $=$

$$= \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{1}{40}$$

d) P(«Obtener un caballo o una carta de copas») $=$

$$= \frac{\text{casos favorables}}{\text{casos posibles}} = \frac{13}{40}$$

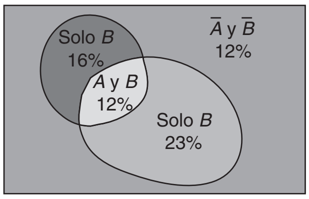
5. El porcentaje de alumnos que solamente lee el periódico es del 23 %.

El porcentaje de alumnos que solamente escucha la radio es del 16 %.

El porcentaje de alumnos que realiza ambas actividades es del 12 %.

A = «Alumnos que leen el periódico»

B = «Alumnos que escuchan la radio»



a) P(«Realice alguna de las dos actividades») $=$

$$= \frac{23 + 16 + 12}{100} = 0{,}51$$

b) P(«No realice ninguna de las dos actividades») $=$

$$= \frac{49}{100} = 0{,}49$$

c) P(«Realice solamente alguna de las dos actividades») $= \dfrac{23 + 16}{100} = 0{,}39$

6. Es un caso de probabilidad experimental.

P(«Tornillo defectuoso») $= \dfrac{68}{5\,000} = 0{,}0136$

7. Se procede de la siguiente forma:

— Pulsa la tecla RAN# de la calculadora y se obtiene un número decimal comprendido entre 0 y 1.

— Multiplica dicho número por 6 obteniendo un número decimal comprendido entre 0 y 6.

— Suma una unidad al número anterior, obtenemos 1 y 7.

— Desprecia la parte decimal y se obtiene un número entero comprendido entre 1 y 6.

18 Sucesos y probabilidad

1. Indica cuáles de los siguientes experimentos son aleatorios y cuáles no:

a) Extraer una carta de una baraja española.

b) Conocer la estatura de una persona de 20 años.

c) Calcular el volumen de una esfera de 2 cm de radio.

d) Conocer el ganador de un torneo de tenis.

2. Un sobre contiene 9 tarjetas numeradas del 1 al 9. Se considera el experimento que consiste en la extracción de una tarjeta de un sobre. Se pide:

a) Espacio muestral.

b) Escribe los sucesos elementales que corresponden a los sucesos:

A = «Obtener número impar» B = «Obtener un número mayor o igual que 5»

c) ¿Son los sucesos A y B compatibles?

d) Escribe el suceso contrario de B.

3. Se lanza un dado y una moneda, por este orden. Se pide:

a) Espacio muestral.

b) Escribe los sucesos elementales que corresponden a los sucesos:

A = «En el dado aparece un número impar» B = «En la moneda aparece cruz»

c) Escribe un suceso incompatible con el suceso B.

d) Escribe el suceso contrario de A.

4. Se extrae una carta de una baraja española, la baraja española consta de 40 cartas divididas en cuatro palos: oros, copas, bastos y espadas. Calcula la probabilidad de que sea:

a) Del palo de espadas.

b) Que no sea del palo de espadas.

c) Que sea figura o que tenga un número menor o igual que 2.

5. En una granja hay ovejas de dos razas, A y B. Se desconoce el porcentaje de cada raza, pero al apartar aleatoriamente 58 animales, resultan 42 de raza B y el resto de raza A.

a) ¿Qué probabilidad asignarías al suceso apartar una oveja de raza A?

b) ¿Qué tipo de probabilidad es?

6. Un dado octaédrico regular tiene sus ocho caras numeradas de la siguiente forma: 1, 2, 3, 4, 5, 5, 5, 5. Se lanza el dado y se observa el número de la cara sobre la que se posa. Se pide:

a) Espacio muestral.

b) Escribe los sucesos elementales que corresponden al suceso A = «Obtener número primo».

c) Probabilidad de cada uno de los sucesos elementales.

d) ¿Son equiprobables los sucesos elementales?

7. En un restaurante de comida rápida tienen 4 tipos de bocadillos diferentes, B1, B2, B3 y B4, y tres tipos de refrescos, naranja, limón y cola, y confeccionan menús que constan de un bocadillo y un refresco.

a) Calcula la probabilidad de que una persona elija un menú que tiene limón.

b) Calcula la probabilidad de que una persona elija un menú que tenga un bocadillo del tipo B2 o B3.

8. Con la ayuda de la calculadora elige 6 números aleatorios comprendidos entre 1 y 5.

SOLUCIONES

1. a) Aleatorio.
b) Aleatorio.
c) No aleatorio.
d) Aleatorio.

2. a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$
b) $A = \{1, 3, 5, 7, 9\}$
$B = \{5, 6, 7, 8, 9\}$
c) Compatibles, ya que tienen sucesos elementales comunes.
d) El suceso contrario a B es «obtener un número menor que 5»; $\overline{B} = \{1, 2, 3, 4\}$.

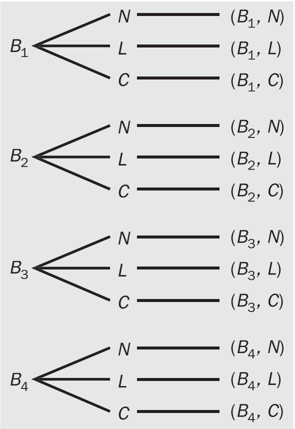
3. a) $E = \{(1, c), (2, c), (3, c), (4, c), (5, c), (6, c), (1, x), (2, x), (3, x), (4, x), (5, x), (6, x)\}$
b) $A = \{(1, c), (3, c), (5, c), (1, x), (3, x), (5, x)\}$
$B = \{(1, x), (2, x), (3, x), (4, x), (5, x), (6, x)\}$
c) Un ejemplo de suceso incompatible con B es el siguiente:
C = «en la moneda aparece cara».
$C = \{(1, c), (2, c), (3, c), (4, c), (5, c), (6, c)\}$
d) El suceso contrario de A es:
$\overline{A}$ = «en el dado aparece un número par».
$\overline{A} = \{(2, x), (4, x), (6, x); (2, c), (4, c), (6, c)\}$

4. a) $P(\text{«espadas»}) = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$
b) $P(\text{«no espadas»}) = \frac{30}{40} = \frac{3}{4}$
c) $P(\text{«figura o número menor o igual a 2»}) =$
$= \frac{20}{40} = \frac{1}{2}$

5. a) $P(\text{«apartar oveja de raza } A\text{»}) = \frac{16}{58} = \frac{8}{29}$
b) Es una probabilidad experimental.

6. a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5\}$
b) $A = \{1, 2, 3, 5\}$
c) $P(1) = P(2) = P(3) = P(4) = \frac{1}{8}$; $P(5) = \frac{1}{2}$
d) No hay equiprobabilidad.

7. Se considera el diagrama de árbol:



a) $P(\text{elegir un menú que contenga limón}) =$
$= P(\{B1, L), (B2, L), (B3, L), (B4, L)\}) =$
$= \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$
b) $P(\text{elegir un menú que contenga } B1 \text{ o } B2) =$
$= P(\{B1, N), (B2, N), (B1, L), (B2, L), (B1, C),$
$(B2, C)\}) = \frac{6}{12} = \frac{1}{2}$

8. Utilizando la tecla RAN# de la calculadora cinco veces se obtiene, por ejemplo, los números:

0,587, 0,795, 0,213, 0,668, 0,026

Considerando la parte decimal de cada uno de ellos y eligiendo los que estén entre 1 y 5, se obtiene: 5, 5, 2, 1, 3.

Calcular y comparar probabilidades

1. Hace casi seis meses que Ana María controla el tiempo que espera el bus, cada mañana, para trasladarse a su trabajo. Organizó los datos en la tabla de frecuencia siguiente en la que t es el tiempo medido en minutos.

Tiempo	$0 \leq t < 2$	$2 \leq t < 4$	$4 \leq t < 6$	$6 \leq t < 8$	$8 \leq t < 10$	$10 \leq t < 12$	$12 \leq t < 14$
Frecuencia	7	12	29	25	22	18	14

¿Cuál es el tiempo máximo (o mínimo) que espera Ana María el bus?

Estima la probabilidad que Ana María espere entre 6 y 8 minutos.

2. El cuadro siguiente consigna información sobre la población indígena y la población total en algunos países de América Latina, alrededor del año 1990.

País	Población total	Población indígena
Argentina	32 546 517	350 000
Chile	13 099 513	1 000 000
Ecuador	10 264 137	3 800 000
Guatemala	9 197 345	5 300 000
México	83 226 037	12 000 000
Perú	21 588 181	9 300 000

Fuente: "Mujeres Latinoamericanas en cifras". Instituto de la mujer, Ministerio de Asuntos Sociales de España y Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales, FLACSO. 1995

¿En cuál de estos países es mayor la probabilidad que sea indígena una persona elegida al azar? ¿Cuál es la probabilidad en el caso de Chile?

3. Para decidir sobre distribución presupuestaria, se consideró la información que consigna el cuadro que sigue.

Chile	Población		
Año	Total	Infantil 0 - 14 años	Adulta mayor 65 años y más
1970	8 884 768	3 481 142	446 711
1982	11 329 736	3 653 113	659 517
1992	13 348 401	3 929 468	877 044

Fuente: Estadísticas de Chile en el siglo XX, Instituto Nacional de Estadísticas (INE), Santiago, 1999

¿En qué año es menor la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mayor de 65 años?

¿En qué año es menor la probabilidad de que una persona elegida al azar sea menor de 14 años?

Experimentando con probabilidad.

1. Experimentar algunos lanzamientos con vasos de cartón o con chinches u otro objeto que no presente simetría.

I. Predecir, suponiendo un total de 30 lanzamientos, cuál será el número por cada una de las posibles formas de aterrizaje del objeto.

II. Hacer la experiencia, registrar los resultados y contrastar con la predicción.

III. Comparar los resultados obtenidos entre quienes realizaron la experiencia con el mismo tipo de objeto. Considerar la suma del total de experiencias realizadas; comparar los resultados obtenidos.

IV. Constatar cómo esta frecuencia tiende a estabilizarse en la medida en que aumenta el número de experimentos realizados.

2. Se lanza un dado 18 000 veces; se obtienen los resultados consignados en la siguiente tabla, agrupados de acuerdo al número de tiradas.

Nº de tiradas	Resultados posibles					
	1	2	3	4	5	6
20	5	4	2	4	2	3
60	7	6	6	11	9	21
300	47	39	44	56	42	72
600	89	84	82	111	104	130
1200	174	166	185	203	207	265
2400	362	345	387	396	407	503
6000	946	885	1002	993	941	1233
18000	2911	2851	2833	2766	2806	3833

Calcula las frecuencias relativas para los datos de dos filas y de dos columnas. ¿Qué deducción se puede plantear a partir del análisis de estos resultados?

3. El cuadro que sigue registra las veces que resultó ‘cara’ en un total de 10 000 lanzamientos de una moneda. En cada celda se registra el número de veces que resultó ‘cara’ por cada 100 lanzamientos.

47	45	53	45	49	48	58	43	48	54
41	47	52	47	50	51	60	52	46	46
51	46	46	41	45	51	54	58	40	53
48	52	52	51	52	49	55	51	53	55
59	47	44	49	52	44	50	51	49	46
51	48	51	59	48	52	48	50	49	54
52	59	48	50	47	50	47	52	48	41
55	57	51	55	47	46	57	50	54	48
39	45	46	53	47	53	52	53	53	51
41	48	54	50	51	41	55	49	45	53

Responde las siguientes preguntas y plantea reflexiones acerca de las respuestas.

I. ¿Cuántas celdas registran 50 caras, del total de 100?

II. ¿Cuál es el número más alejado de 50?

III. ¿Cuántas veces se repite ese o esos números?

IV. Efectuar las sumas de las líneas y de las columnas y analizar esos resultados que corresponden, cada uno, a 1000 lanzamientos

V. ¿Cuál es el total de caras en los 10 000 lanzamientos?

Unidad 4

Probabilidad y Estadística

“La Incertidumbre y la Adivinanza”

CONTENIDOS:

13. **Variable Aleatoria : estudio y experimentación en casos concretos. Gráfico de frecuencia de una variable aleatoria a partir de un experimento estadístico.**
14. **Relación entre la probabilidad y la frecuencia relativa. Ley de los grandes números. Uso de programas computacionales para la simulación de experimentos aleatorios.**
15. **Resolución de problemas sencillos que involucren suma o producto de probabilidades. Probabilidad condicionada.**

APRENDIZAJES ESPERADOS:

1. Reconocen variables aleatorias y las interpretan de acuerdo a los contextos en que se presentan .
2. Conocen empíricamente la ley de los grandes números y relacionan la frecuencia relativa con la probabilidad de un suceso .
3. Resuelven problemas que involucran el cálculo de probabilidad condicionada en situaciones sencillas .
4. Distinguen entre sucesos equiprobables y no equiprobables .

LA HISTORIA

Desde los comienzos de la civilización han existido formas sencillas de estadísticas, pues ya se utilizaban representaciones gráficas y otros símbolos en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para contar el número de personas, animales o ciertas cosas. Hacia el año 3000 A.C. los babilonios usaban ya pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos en tablas sobre la producción agrícola y de los géneros vendidos o cambiados mediante trueque. Los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país mucho antes de construir las pirámides en el siglo XXXI a.C. Los libros bíblicos de Números y Crónicas incluyen, en algunas partes, trabajos de estadística. El primero contiene dos censos de la población de Israel y el segundo describe el bienestar material de las diversas tribus judías. En China existían registros numéricos similares con anterioridad al año 2000 A.C. Los griegos clásicos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia el año 594 A.C. para cobrar impuestos.

El Imperio romano fue el primer gobierno que recopiló una gran cantidad de datos sobre la población, superficie y renta de todos los territorios bajo su control. Durante la edad media sólo se realizaron algunos censos exhaustivos en Europa. Los reyes carolingios Pipino el Breve y Carlomagno ordenaron hacer estudios minuciosos de las propiedades de la Iglesia en los años 758 y 762 respectivamente.

Después de la conquista normanda de Inglaterra en 1066, el rey Guillermo I de Inglaterra encargó un censo. La información obtenida con este censo, llevado a cabo en 1086, se recoge en el Domesday Book. El registro de nacimientos y defunciones comenzó en Inglaterra a principios del siglo XVI, y en 1662 apareció el primer estudio estadístico notable de población, titulado Observations on the London Bills of Mortality (Comentarios sobre las partidas de defunción en Londres).

Un estudio similar sobre la tasa de mortalidad en la ciudad de Breslau, en Alemania, realizado en 1691, fue utilizado por el astrónomo inglés Edmund Halley como base para la primera tabla de mortalidad. En el siglo XIX, con la generalización del método científico para estudiar todos los fenómenos de las ciencias naturales y sociales, los investigadores aceptaron la necesidad de reducir la información a valores numéricos para evitar la ambigüedad de las descripciones verbales.

En nuestros días, la estadística se ha convertido en un método efectivo para describir con exactitud los valores de los datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos y físicos, y sirve como herramienta para relacionar y analizar dichos datos. El trabajo del experto estadístico no consiste ya sólo en reunir y tabular los datos, sino sobre todo el proceso de interpretación de esa información. El desarrollo de la teoría de la probabilidad ha aumentado el alcance de las aplicaciones de la estadística. Muchos conjuntos de datos se pueden aproximar, con gran exactitud, utilizando determinadas distribuciones probabilísticas; los resultados de éstas se pueden utilizar para analizar datos estadísticos. La probabilidad es útil para comprobar la fiabilidad de las inferencias estadísticas y para predecir el tipo y la cantidad de datos necesarios en un determinado estudio estadístico.

Contenido 13: VARIABLE ALEATORIA

ACTIVIDAD 1

Dada la serie de números naturales , encontrar el término de la serie que se indica

a) 1 , 2 , 3 , 4 , 5 , 6 , ... , $\boxed{10º\ t}$, ...

b) 1 , 2 , 3 , 5 , 9 , 14 , ... , $\boxed{15º\ t}$, ...

c) 2 , 5 , 8 , 11 , 14 , ... , $\boxed{22º\ t}$, ...

ACTIVIDAD 2

Vamos a consultar por orden de lista en el curso , ¿cuántos hermanos tiene .? , e iremos escribiendo la secuencia de las respuestas en el pizarrón. Por ejemplo ...

1 , 2 , 0 , 1 , ,1 , 3 , 1 , 0 , 0 , 2 , ... , $\boxed{15}$, . . .

Hacemos la siguiente pregunta: ¿Podemos saber el número de hijos que tiene el alumno del curso , que en la lista es el 15? ¿Se puede predecir? ¿por qué?

Justifica: ____

ACTIVIDAD 3

Vamos a consultar por orden de lista en el curso , ¿ Cuántos pesos tienes en total en los bolsillos de tu ropa .? , e iremos escribiendo la secuencia de las respuestas en el pizarrón .

Por ejemplo ...

$ 120 , $ 350 , $ 1000 , $ 0 , $ 280 , $ 460 , ... , $\boxed{10}$, . . .

Hacemos la siguiente pregunta: ¿Podemos saber el dinero que tiene el alumno del curso , que por la lista es el 10?

ACTIVIDAD 4

El profesor plantea la siguiente pregunta :

- Si toco el interruptor de la luz y lo presiono ,
  ¿ qué puede suceder . . . :? –
  ¿ la respuesta es predecible .? –
  ¿ tengo certeza de la respuesta dada .?

DEFINICIÓN:
Existen dos tipos de fenómenos:

deterministas, que son aquellos cuyos resultados se pueden predecir de antemano, y **estocásticos** o **aleatorios**, que son los que dependen del azar (no se pueden predecir).

ACTIVIDAD 5

Enunciar ejemplos de situaciones donde la variable enunciada sea de carácter determinístico y también ejemplos en donde la variable dada como respuesta sea de carácter aleatorio.

Clasificar los dos tipos de ejemplos que se plantean.

Determinar que existen dos tipos de ejemplos en donde las variables enunciadas sean de carácter determinístico o aleatorio.

Situaciones Determinísticas	**Situaciones Aleatorias**

DEFINICIÓN:
Una **variable** es una cantidad o magnitud que no es constante, que puede tomar distintos valores.
Una ***Variable Aleatoria*** es una variable cuyo valor está determinado por el resultado de un experimento aleatorio.

VARIABLES ALEATORIAS HAY EN TODOS LADOS, ¿LO HAS NOTADO?

Por ejemplo:

- El número de minutos que tienes que esperar el micro en la esquina de costumbre para venir al colegio. ¿Cómo lo sabemos?, puedes afirmar el tiempo que te demoras en esperar el micro todos los días, ¿es el mismo?

- El número de personas que entrará a comprar a la Pool durante el día.

Nombra unas cinco situaciones más:

ESTUDIO Y EXPERIMENTACIÓN

Elijamos una variable aleatoria cualquiera y estudiémosla:

“La cantidad de gente que compra en un día en la Pool”, como ya habíamos visto es una variable aleatoria. Entonces el profesor realizó este experimento y estuvo una semana completa fuera de la Pool y anotó la cantidad de personas que compró, estos fueron los resultados:

Día	**Cantidad de personas**
Lunes	267
Martes	350
Miércoles	184
Jueves	291
Viernes	570
Sábado	432
Domingo	369

¿Qué crees que podemos hacer con estos datos?

¿Podemos saber la cantidad de personas que compró durante una semana en la Pool?

¿Podemos saber la cantidad promedio por día de personas que compra en la Pool?

¿Puedes representar de otra manera los datos que están en la tabla?

Una ayuda es:

EJERCICIOS

1. Realiza un experimento con tus compañeros de curso, pregúntales cuál es su promedio de notas a nivel general del primer semestre. Luego ordénalos en una tabla, como la del ejemplo anterior, y grafícala.

   ¿Este es un ejemplo de variable aleatoria?

2. Aplica otro experimento con tus compañeros, pregunta ¿qué carreras les interesa estudiar en la universidad? Verifica si es o no una variable aleatoria. Ordénalos en una tabla y luego en un gráfico.

CONCEPTUALIZACIÓN:

La cantidad de veces que se repite un suceso o un experimento obtiene el nombre de **Frecuencia** (f_i).

Día	Cantidad de Personas
Lunes	267
Martes	350
Miércoles	184
Jueves	291
Viernes	570
Sábado	432
Domingo	369
Total	***2463***

Frecuencia ó Frecuencia Absoluta

A la tabla se le denomina **Tabla de Frecuencias**

Observación:

Los experimentos no aleatorios se denominan **deterministas**. Sus resultados no dependen del azar, sino de las leyes de la naturaleza, por ejemplo al calentar agua hasta alcanzar los 100°C se producirá con certeza su ebullición.

El lanzamiento de un dado o de una moneda, la extracción de una bola de lotería o de una carta de la baraja, etc., son experimentos aleatorios porque sus resultados dependen del azar. Generalmente se conocen los resultados posibles de cada experimento, pero no se puede determinar cuál de ellos se va a producir. El conjunto formados por todos los resultados posibles de un experimento aleatorio se llama **Espacio Muestral.**

EJERCICIOS:

- Determina si los experimentos siguientes son deterministas o aleatorios, su espacio muestral:

1. Lanzar un dado y observar el resultado
2. Dejar caer una pelota de dos colores (blanco y roja y observar sobre qué color queda en reposo)
3. Calentar a la misma temperatura dos varillas, una de cobre y la otra de hierro, y observar cuál se alarga más
4. Preguntar a los alumnos de una clase por el número de hermanos que tienen
5. Dejar caer por un mismo plano inclinado dos bolas de acero, una de 1 kg y la otra de ½ kg, y observar cuál de las dos hace una mayor recorrido al pasar al plano horizontal.
6. Lanzar un lápiz al aire y observar que si al caer al suelo corta o no alguna línea de las que forman las baldosas del suelo.

Contenido 14: RELACION ENTRE PROBABILIDAD Y FRECUENCIA RELATIVA

Para conocer esta relación, necesitamos saber que es probabilidad y que es frecuencia relativa.

Conceptualización:

La probabilidad de un **suceso A** es el cuociente entre el número de **casos favorables** y el número de **casos posibles** .

La probabilidad de un **suceso A** se representa por $p(A)$.

$$p(A) = \frac{\text{número de casos favorables al suceso A}}{\text{número de casos posibles}}$$

Observación: **Casos posibles** son todos los resultados del experimento ; es decir , todos los elementos del **espacio muestral .**

Casos favorables son los elementos que componen el suceso **A**

Actividad 11

Un juego de naipes inglés . Calcular la probabilidad de sacar una carta :

a) De color negro

b) De color rojo

c) De color negro y que sea un trébol

d) De color rojo y que sea un corazón

e) De color negro , que sea un trébol y además que sea el número 3

f) De color negro o de color rojo

g) De color negro y de color rojo

h) De color negro y que sea trébol o pica

i) De color no negro

j) Qué no sea de color rojo

k) Qué no sea un corazón

l) Qué no sea ni corazón ni trébol.

Conceptualización:

Consecuencias de la definición :

a) La probabilidad de un suceso cualquiera toma valores entre 0 y 1.

$$0 \leq p(A) \leq 1$$

b) La probabilidad del suceso cierto es la unidad.

$$p(E) = 1$$

c) Si dos sucesos son incompatibles , la probabilidad de su unión es :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B)$$

d) La probabilidad del " **suceso contrario al suceso A**" es P($\overline{A}$):

$$p(\overline{A}) = 1 - p(A)$$

e) La probabilidad del suceso imposible es :

$$p(\phi) = 0$$

f) La probabilidad de la unión de sucesos compatibles es :

$$p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$$

Te acordaste de los que significa PROBABILIDAD, ahora veamos que es la FRECUENCIA RELATIVA

Veamos nuevamente la tabla del experimento que hizo tu profesor:

Día	Cantidad de Personas	Frecuencia relativa
Lunes	267	$267/2463$
Martes	350	$350/2463$
Miércoles	184	
Jueves	291	
Viernes	570	
Sábado	432	
Domingo	369	
Total	***2463***	

$267/2463$, significa que el día lunes entraron 267 personas de un total de 2463 personas.
Completa la tabla.

Calcula la probabilidad de que una persona entre a comprar el día Lunes, Miércoles y Domingo.

Notas la relación que existe!

Escribe en tu cuaderno las conclusiones que sacas de este ejemplo.

EJERCICIOS:

1. Se lanza un dado 18 000 veces; se obtienen los resultados consignados en la siguiente tabla, agrupados de acuerdo al número de tiradas.

Nº de tiradas	Resultados posibles					
	1	2	3	4	5	6
20	5	4	2	4	2	3
60	7	6	6	11	9	21
300	47	39	44	56	42	72
600	89	84	82	111	104	130
1200	174	166	185	203	207	265
2400	362	345	387	396	407	503
6000	946	885	1002	993	941	1233
18000	2911	2851	2833	2766	2806	3833

Calcula las frecuencias relativas para los datos de dos filas y de dos columnas. ¿Qué deducción se puede plantear a partir del análisis de estos resultados?

2. El cuadro que sigue registra las veces que resultó ‘cara’ en un total de 10 000 lanzamientos de una moneda. En cada celda se registra el número de veces que resultó ‘cara’ por cada 100 lanzamientos.

47	45	53	45	49	48	58	43	48	54
41	47	52	47	50	51	60	52	46	46
51	46	46	41	45	51	54	58	40	53
48	52	52	51	52	49	55	51	53	55
59	47	44	49	52	44	50	51	49	46
51	48	51	59	48	52	48	50	49	54
52	59	48	50	47	50	47	52	48	41
55	57	51	55	47	46	57	50	54	48
39	45	46	53	47	53	52	53	53	51

41	48	54	50	51	41	55	49	45	53

Responde las siguientes preguntas y plantea reflexiones acerca de las respuestas.

I. ¿Cuántas celdas registran 50 caras, del total de 100?

II. ¿Cuál es el número más alejado de 50?

III. ¿Cuántas veces se repite ese o esos números?

IV. Efectuar las sumas de las líneas y de las columnas y analizar esos resultados que corresponden, cada uno, a 1000 lanzamientos

V. ¿Cuál es el total de caras en los 10 000 lanzamientos?

3. Hace casi seis meses que Ana María controla el tiempo que espera el bus, cada mañana, para trasladarse a su trabajo. Organizó los datos en la tabla de frecuencia siguiente en la que t es el tiempo medido en minutos.

Tiempo	0 £ t < 2	2 £ t < 4	4 £ t < 6	6 £ t < 8	8 £ t < 10	10 £ t < 12	12 £ t < 14
Frecuencia	7	12	29	25	22	18	14

¿Cuál es el tiempo máximo (o mínimo) que espera Ana María el bus?

Estima la probabilidad que Ana María espere entre 6 y 8 minutos.

4. El cuadro siguiente consigna información sobre la población indígena y la población total en algunos países de América Latina, alrededor del año 1990.

País	Población total	Población indígena
Argentina	32 546 517	350 000
Chile	13 099 513	1 000 000
Ecuador	10 264 137	3 800 000
Guatemala	9 197 345	5 300 000
México	83 226 037	12 000 000
Perú	21 588 181	9 300 000

Fuente: "Mujeres Latinoamericanas en cifras". Instituto de la mujer, Ministerio de Asuntos Sociales de España y Facultad Latinoamericana de Ciencias Sociales, FLACSO. 1995

¿En cuál de estos países es mayor la probabilidad que sea indígena una persona elegida al azar? ¿Cuál es la probabilidad en el caso de Chile?

5. Para decidir sobre distribución presupuestaria, se consideró la información que consigna el cuadro que sigue.

Chile Año	Población		
	Total	Infantil 0 - 14 años	Adulta mayor 65 años y más
1970	8 884 768	3 481 142	446 711
1982	11 329 736	3 653 113	659 517
1992	13 348 401	3 929 468	877 044

Fuente: Estadísticas de Chile en el siglo XX, Instituto Nacional de Estadísticas (INE), Santiago, 1999

¿En qué año es menor la probabilidad de que una persona elegida al azar sea mayor de 65 años?

¿En qué año es menor la probabilidad de que una persona elegida al azar sea menor de 14 años?

6. En una clínica médica se ha organizado un archivo de los pacientes por sexo y por tipo de hepatitis. Son 45 varones de los cuales 25 tienen hepatitis tipo A y 20, tipo B. Son 35 mujeres con hepatitis tipo A y 20 con hepatitis tipo B. Si se selecciona una de las fichas del archivo al azar, determinar la probabilidad de sacar:

I. Una correspondiente al sexo femenino.

II. Una correspondiente a un caso de hepatitis tipo B.

III. Una correspondiente al sexo masculino y con hepatitis tipo A.

IV. L a respuesta anterior , ¿es igual al producto de las probabilidades de ambos sucesos calculados independientemente?

Probabilidad de sucesos

Al definir los sucesos hablamos de las diferentes relaciones que pueden guardar dos sucesos entre sí, así como de las posibles relaciones que se pueden establecer entre los mismos. Vamos a ver ahora cómo se refleja esto en el cálculo de probabilidades.

A) UN SUCESO PUEDE ESTAR CONTENIDO EN OTRO: entonces, la probabilidad del primer suceso será menor que la del suceso que lo contiene.

Ejemplo: lanzamos un dado y analizamos dos sucesos: a) que salga el número 6, y b) que salga un número par. Dijimos que el suceso a) está contenido en el suceso b).

P(A) = 1/6 = 0,166

P(B) = 3 / 6 = 0,50

Por lo tanto, podemos ver que la probabilidad del suceso contenido, suceso a), es menor que la probabilidad del suceso que lo contiene, suceso b).

B) DOS SUCESOS PUEDEN SER IGUALES: en este caso, las probabilidades de ambos sucesos son las mismas.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que salga múltiplo de 2. Las soluciones coinciden en ambos casos.

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

C) INTERSECCIÓN DE SUCESOS: es aquel suceso compuesto por los elementos comunes de los dos o más sucesos que se intersectan. La probabilidad será igual a la probabilidad de los elemntos comunes.

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que sea mayor que 3. La intersección de estos dos sucesos tiene dos elementos: el 4 y el 6.

Su probabilidad será por tanto:

$$P(A \cap B) = 2 / 6 = 0,33$$

D) UNIÓN DE DOS O MÁS SUCESOS: la probabilidad de la unión de dos sucesos es igual a la suma de las probabilidades individuales de los dos sucesos que se unen, menos la probabilidad del suceso intersección

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga número par, y b) que el resultado sea mayor que 3. El suceso unión estaría formado por los siguientes resultados: el 2, el 4, el 5 y el 6.

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

$$P (A \cap B) = 2 / 6 = 0,33$$

Por lo tanto,

$$P (A \cup B) = (0,50 + 0,50) - 0,33 = 0,666$$

E) SUCESOS INCOMPATIBLES: la probabilidad de la unión de dos sucesos incompatibles será igual a la suma de las probabilidades de cada uno de los sucesos (ya que su intersección es el conjunto vacio y por lo tanto no hay que restarle nada).

Ejemplo: lanzamos un dado al aire y analizamos dos sucesos: a) que salga un número menor que 3, y b) que salga el número 6.

La probabilidad del suceso unión de estos dos sucesos será igual a:

$$P(A) = 2 / 6 = 0,333$$

$$P(B) = 1 / 6 = 0,166$$

Por lo tanto, $P(A \cup B) = 0,33 + 0,166 = 0,50$

F) SUCESOS COMPLEMENTARIOS: la probabilidad de un suceso complementario a un suceso (A) es igual a 1 - P(A)

Ejemplo: lanzamos un dado al aire. el suceso (A) es que salga un número par, luego su complementario, suceso (B), es que salga un número impar.
La probabilidad del suceso (A) es igual a :

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$

Luego, la probabilidad del suceso (B) es igual a:

$$P(B) = 1 - P(A) = 1 - 0,50 = 0,50$$

Se puede comprobar aplicando la regla de "casos favorables / casos posibles":

$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

G) UNIÓN DE SUCESOS COMPLEMENTARIOS: la probabilidad de la unión de dos sucesos complementarios es igual a 1.

Ejemplo: seguimos con el ejemplo anterior: a) que salga un número par, y b) que salga un número impar. La probabilidad del suceso unión de estos dos sucesos será igual a:

$$P(A) = 3 / 6 = 0,50$$
$$P(B) = 3 / 6 = 0,50$$

Por lo tanto,

$$P(A \cup B) = 0,50 + 0,50 = 1$$

Probabilidad condicionada

Las **probabilidades condicionadas** se calculan una vez que se ha incorporado información adicional a la situación de partida:

> **Ejemplo**: se tira un dado y sabemos que la probabilidad de que salga un 2 es 1/6 (probabilidad a priori). Si incorporamos nueva información (por ejemplo, alguien nos dice que el resultado ha sido un número par) entonces la probabilidad de que el resultado sea el 2 ya no es 1/6.

Las probabilidades condicionadas se calculan aplicando la siguiente **fórmula**:

$$P(B/A) = \frac{P(A \wedge B)}{P(A)}$$

Donde:

> **P (B/A)** es la probabilidad de que se de el suceso B condicionada a que se haya dado el suceso A.
>
> **P (B ∩ A)** es la probabilidad del suceso simultáneo de A y de B
>
> **P (A)** es la probabilidad a priori del suceso A

En el **ejemplo** que hemos visto:

> **P (B/A)** es la probabilidad de que salga el número 2 (suceso B) condicionada a que haya salido un número par (suceso A).
>
> **P (B ∩ A)** es la probabilidad de que salga el dos y número par.
>
> **P (A)** es la probabilidad a priori de que salga un número par.

Por lo tanto:

$$P(B \cap\perp A) = 1/6$$
$$P(A) = 1/2$$
$$P(B/A) = (1/6) / (1/2) = 1/3$$

Luego, la probabilidad de que salga el número 2, si ya sabemos que ha salido un número par, es de 1/3 (mayor que su probabilidad a priori de 1/6).

2º ejemplo:
En un estudio sanitario se ha llegado a la conclusión de que la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios (suceso B) es el 0,10 (probabilidad a priori).
Además, la probabilidad de que una persona sufra problemas de obesidad (suceso A) es el 0,25 y la probabilidad de que una persona sufra a la vez problemas de obesidad y coronarios (suceso intersección de A y B) es del 0,05.
Calcular la probabilidad de que una persona sufra problemas coronarios si está obesa (probabilidad condicionada P(B/A)).

$$P\ (B \cap A) = 0{,}05$$
$$P\ (A) = 0{,}25$$
$$P\ (B/A) = 0{,}05 \ / \ 0{,}25 = 0{,}20$$

Por lo tanto, la probabilidad condicionada es superior a la probabilidad a priori. No siempre esto es así, a veces la probabilidad condicionada es igual a la probabilidad a priori o menor.
Por ejemplo: probabilidad de que al tirar un dado salga el número 2, condicionada a que haya salido un número impar.
La probabilidad condicionada es en este caso cero, frente a una probabilidad a priori de 1/6.

EJERCICIOS

1. Lanza una moneda y un dado. ¿Cuál es la probabilidad de obtener "cara" o "cinco"?

2. Lanza simultáneamente dos monedas. ¿Cuál es la probabilidad de obtener cara en por lo menos una de ellas?

3. Se organiza un sorteo en el que participan los números del 1 al 500. Gana quien tenga un número múltiplo de 4 o una múltiplo de 6. ¿Cuál es la probabilidad de ganar?

4. En el lanzamiento de un dado, determina la probabilidad de obtener:

a) el número 2

b) un número par

c) un 2 ó un 4.

5. Calcula la probabilidad de que al lanzar 2 dados se obtenga:

a) uno que sea mayor que 2 o que la suma de sus números sea menor que 4.
b) b) que sus números sumados sean 3; 9 ó 12.

6. Calcula la probabilidad de que al lanzar dos veces un dados salga:

a) las dos veces un as.

b) en la primera un as y en la segunda no salga un as.

7. Si la probabilidad de que Juan apruebe el curso es de un 80% y la de Patricia es de un 85%. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos aprueben el curso?

8. Calcula la probabilidad de obtener dos reyes de un naipe de 52 cartas, sin volver la primera carta a la baraja.

9. Una bolsa contiene 100 fichas numeradas del 1 al 100. ¿Cuál es la probabilidad de que al sacar una ficha, ésta sea un múltiplo de 7?

10. Se lanzan al mismo tiempo 2 dados. Calcula la probabilidad:

a) que la suma de ellos sea 9.

b) que la diferencia de ellos sea 2.

c) de que salga por lo menos un 5.

11. Una empresa desea contratar 25 operarios y al llamado concurren 80 postulantes. Se aplica un examen de admisión el cual da como resultado los siguientes puntajes:

290	299	300	328	294	323	295	298	295	291
294	308	397	305	297	295	304	320	311	320
301	299	300	324	324	299	300	304	320	304
302	322	307	318	314	311	306	317	312	310
303	313	308	322	310	312	301	323	317	310
319	310	318	311	307	318	306	314	317	319
317	315	314	313	319	310	311	309	316	314
313	306	308	309	312	305	315	319	319	312

Ordena los datos en una tabla de frecuencias y agrúpalos en intervalos de 15 de magnitud. Realiza los siguientes cálculos

- Calcula la probabilidad de tener puntaje entre 300 y 310.
- Que porcentaje representa los puntajes entre 320 y 325.
- Cuál es la probabilidad de obtener menos de 300 puntos.

12. Lanza 50 veces un dado con las caras numeradas del 1 al 6 y anota los resultados.
    a) Efectúa el recuento
    b) Forma la tabla de frecuencias
    c) Representa esta situación en un diagrama de barras

13. Se extrae una carta de un baraja española. ¿Cuál es la probabilidad de que
    a) sea un caballo o un oro
    b) sea el caballo de oros?

14. Se lanzan dos monedas. Describe el espacio muestral. ¿Qué es más probable, obtener dos caras u obtener una cara y una cruz?

15. Calcula la probabilidad de que la matrícula de un coche de 4 dígitos:
    a) Termine en 87
    b) Sea múltiplo de 4
    c) Sólo tenga cifras pares
    d) Tenga las cuatro cifras iguales

REALIZA LA PENULTIMA ACTIVIDAD DEL AÑO, HAZ EL TALLER 12.

“POR FIN TERMINAMOS EL AÑO, SE ACABÓ MATEMÁTICA”