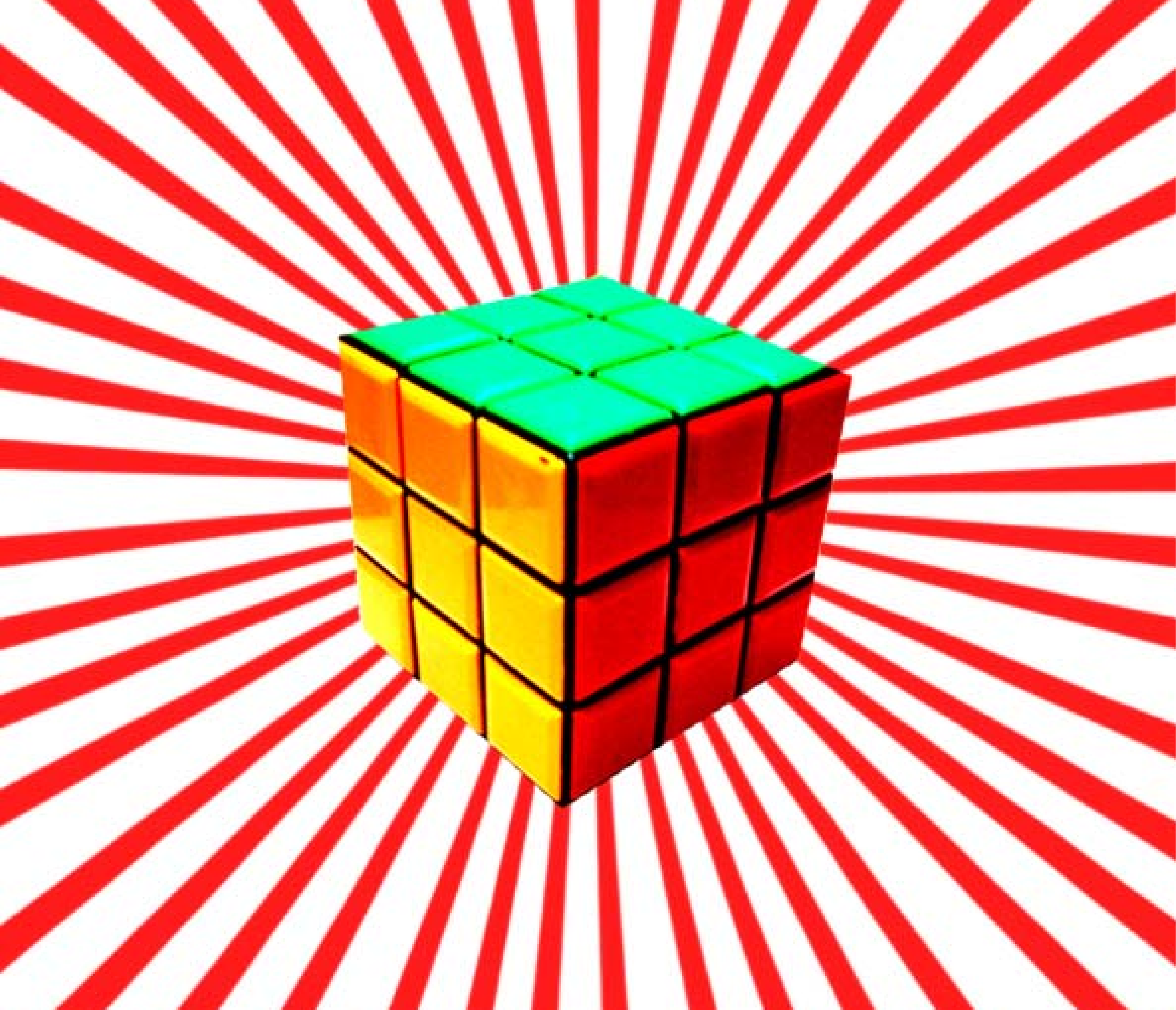


TALLER DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD:

JUEGOS Y TRABAJOS PARA AFIANZAR CONCEPTOS

de Raúl Núñez Cabello

publicatuslibros.com

TALLER DE ESTADÍSTICA Y PROBABILIDAD:

JUEGOS Y TRABAJOS PARA AFIANZAR CONCEPTOS

Raúl Núñez Cabello

Publicatuslibros.com es una iniciativa de:

Íttakus, sociedad para la información, S.L.
CIF B 23576481
C/ Sierra Mágina, 10.
23009 Jaén-España
www.ittakus.com

Índice de contenido

Presentación

La idea de hacer un taller de estadística y probabilidad surgió cuando me comentaron en mi instituto que tenía una hora a la semana en 3º de ESO digamos de “libre disposición”. Le pregunté a una compañera del departamento de lengua que también tenía una hora similar con otro grupo qué es lo que hacía ella con las alumnas y alumnos durante este tiempo y me comentó que hacían talleres de lectura y actividades relacionadas con su departamento. Obviamente, después de esta consulta, decidí que iba a realizar algún tipo de taller sobre matemáticas, que es mi especialidad.

Talleres de matemáticas hay muchos y hoy en día es muy fácil buscar información en libros o por internet sobre la multitud de trabajos que se pueden realizar en ellos. Sin embargo, a mí me interesaba algo más concreto.

No es ningún secreto que el último bloque de matemáticas en casi todos los cursos de ESO es la estadística y probabilidad y que, desgraciadamente, en la mayoría de los casos no se llega a esta última parte curso tras curso. Consecuencia: las alumnas y alumnos terminan la etapa de educación secundaria obligatoria sin saber nada de este tema. Es algo increíble, aunque ya se vea ésto con total normalidad, que la que es posiblemente la rama de las matemáticas que tiene más aplicaciones, importancia y uso diario en más sectores de la sociedad sea la gran desconocida cuando se finaliza la educación obligatoria.

Ya en las últimas Jornadas de Aprendizaje y Educación Matemática (JAEM) en Julio de 2007 en Granada, que tuvieron una gran acogida por parte del profesorado de matemáticas de toda España (según comentó la organización se inscribieron más de 800 profesores) y a las que tuve el placer de asistir, se tocó este punto en alguna conferencia: la estadística y probabilidad forma parte de las matemáticas, y como tal, deben tener un hueco real en el tiempo que ocupan las matemáticas en el aula y no solo teóricamente al final de las programaciones, a las que se sabe que no se va a llegar cuando se están escribiendo.

Aunque yo creo que, sin duda, la mejor solución sería que este bloque estuviera al principio de las programaciones de matemáticas en, al menos, un curso de ESO, como ésto generalmente no va a ocurrir en la mayoría de institutos de educación secundaria, se me ocurrió la idea de que si se puede disponer esporádicamente de alguna hora con los alumnos (alternativa a la religión, tutorías, guardias, etc) se aproveche esta hora para introducir algunos conceptos probabilísticos con juegos de azar. Además, estos juegos y actividades pueden servir muy bien para introducir algún tema transversal, a veces tan difíciles de introducir en algunas clases. En este libro se ha puesto entre paréntesis en el título de la actividad cuando se tocaba algunos de estos temas.

Soy consciente de que esta solución es solamente un “parche” y que en ningún caso la enseñanza de la estadística y probabilidad debería realizarse así, sino como se hace en una clase de matemáticas tradicional, es decir, dando primero las definiciones y los teoremas necesarios para desarrollar el tema concreto y luego, después de hacer algunos ejercicios que garanticen la comprensión de los conceptos correspondientes, empezar a organizar juegos entre los alumnos para que vean la utilidad práctica de la probabilidad a la vez que se divierten y se “enganchan” por este tipo de juegos.

Ésta ha sido la razón de ser de este libro, proporcionarles a las profesoras y profesores que lo estimen oportuno algunos juegos probabilísticos para hacer en clase de vez en cuando, así como animarles a hacerlo, ya que, hoy por hoy, parece la mejor (y casi única) opción en la mayoría de los casos para introducir a las alumnas y alumnos en la que es, sin lugar a dudas, una de las partes más importantes de la matemática actual: el cálculo de probabilidades y la estadística matemática, en particular familiarizarse con el uso de los parámetros estadísticos más habituales.

El autor.

Capítulo 1: Actividades de introducción de probabilidad y azar.

1. Juego de dados.

Para empezar se puede intentar este sencillo juego. Se divide la clase en grupos de 5 alumnos y se les entrega a cada grupo un par de dados. Cada grupo tira 5 veces el par de dados anotando en cada ocasión el resultado y entendiéndose por resultado la suma de las puntuaciones de ambos dados. Después se pone en común los resultados obtenidos, de forma que los alumnos observen qué números tienen mayor probabilidad de aparecer. Luego, el profesor detallará todos los posibles casos que tiene este experimento, demostrando así el motivo por el cual los números 6, 7 y 8 se han obtenido normalmente más que los demás. Es un buen ejercicio para introducir el concepto de probabilidad de un suceso.

2. Plantear situación real donde aparezca la idea de probabilidad. (Educación para la utilización del tiempo de ocio)

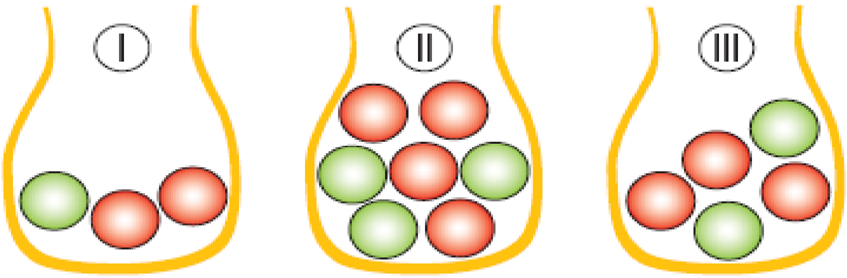
En un campeonato de natación participan los siguientes países: España, Reino Unido, Francia, Bélgica, Corea del Sur, Noruega, Suecia y Brasil. Si se supone que los representantes de los ocho equipos son de igual nivel, ¿te parece muy probable que España consiga la medalla de oro, Noruega la de plata y Francia la de bronce? En esta unidad estudiaremos la forma de resolver este tipo de situaciones, pero mientras podemos adelantar que la probabilidad pedida es tan pequeña que solo ocurrirá aproximadamente 3 veces de cada 1000 que compitan.

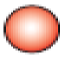
3. El error de Leibniz. (Recurso metodológico de la historia de las matemáticas).

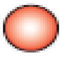
Aparentemente, el concepto de probabilidad es uno de los más sencillos de entender de las matemáticas, pero la historia demuestra que puede llegar a confundir incluso a los más ilustres matemáticos. Leibniz, por ejemplo, era aficionado a los juegos de dados y estaba convencido de que era igual de difícil conseguir 11 puntos que 12, argumentando que ambas puntuaciones sólo se podían conseguir mediante una combinación de dos dados: 6 y 5 en el primer caso y, 6 y 6 en el segundo. En realidad se equivocaba, porque 11 se puede obtener de dos formas: con un 5 en el primer dado y un 6 en el segundo o con un 6 en el primero y un 5 en el segundo. Haz la prueba tirando los dados muchas veces y comprobarás que salen más a menudo 11 puntos que 12.

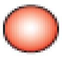
4. Muy probable, poco probable.

¿De cuál de las siguientes bolsas es más probable sacar bola roja?



P_{I} () $= \frac{2}{3} = 0,\widehat{6}$

P_{II} () $= \frac{4}{7} = 0,571\ldots$

P_{III} () $= \frac{3}{5} = 0,6$

Por tanto, es más probable sacar bola roja de la bolsa I.

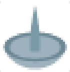
5. Espacio muestral. Sucesos.

a) ¿Cuál es el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de una moneda?

¿Cuál es la probabilidad de cada una de las dos caras?

b) ¿Cuál es el espacio muestral correspondiente al lanzamiento de una chincheta?

Explica por qué no podemos afirmar que:

P[] $= \frac{1}{2}$, P[] $= \frac{1}{2}$

a) $E = \{C, +\}$

$P[C] = P[+] = \frac{1}{2}$

b) $E = \{$ ,  $\}$

Porque no son sucesos equiprobables, ya que la chincheta no es igual por todos los lados.

6. Juegos de azar.

De ilusión también se vive. Cuando se juega a la Primitiva, a la Lotería o las quinielas, pensamos que es posible y hasta probable que nos toque el premio. En realidad es posible, pero muy poco probable. Por ejemplo, jugando una apuesta a la Primitiva tenemos una posibilidad entre casi catorce millones de que nos toque. Jugando una columna en la quiniela tenemos una posibilidad entre más de catorce millones de obtener el pleno al 15. O sea, casi ninguna.

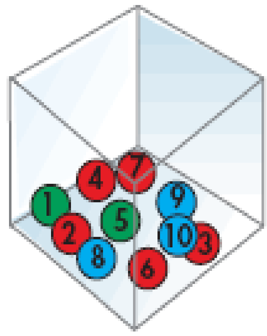
7. En la calculadora.

Tanto las calculadoras como los ordenadores tienen una función de azar que se activa al pulsar la tecla RAND, RAN o RANDOM. Cada vez que pulsamos esta tecla obtenemos un número al azar, llamado número aleatorio, que es un número decimal comprendido entre 0 y 1. Así, pulsando la citada tecla diez veces, podemos obtener una lista diferente a la que obtiene otro compañero. Con ayuda de los números aleatorios podemos simular cualquier tipo de experimento aleatorio sin necesidad de realizarlo.

Capítulo 2: Actividades de desarrollo de probabilidad y azar.

1. Experimento aleatorio sencillo.

De la urna que tienes a la derecha, sacamos una bola al azar y anotamos su número.



a) Describe el espacio muestral. ¿Cuántos casos tiene?

b) Describe los siguientes sucesos:

- BOLA ROJA = A
- BOLA VERDE = B
- BOLA AZUL = C
- BOLA ROJA CON NÚMERO IMPAR = D
- BOLA CON NÚMERO PAR = F

c) Calcula la probabilidad de cada uno de los sucesos anteriores.

a) $E = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10\}$

E tiene 10 casos.

b) $A = \{2, 3, 4, 6, 7\}$

$B = \{1, 5\}$

$C = \{8, 9, 10\}$

$D = \{3, 7\}$

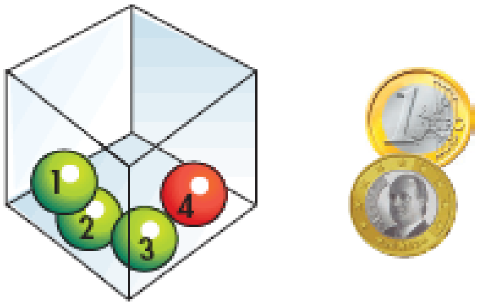
$F = \{2, 4, 6, 8, 10\}$

c) $P[A] = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$ $\quad P[B] = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ $\quad P[C] = \frac{3}{10}$

$P[D] = \frac{2}{10} = \frac{1}{5}$ $\quad P[F] = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$

2. Experimento aleatorio compuesto.

Una experiencia consiste en extraer una bola de esta urna y, después, lanzar la moneda. Los casos son: 1 y C, 1 y +, 2 y C, etc.



a) Escribe el espacio muestral (son 8 casos). ¿Cuál es la probabilidad de cada caso?

b) Describe el suceso BOLA VERDE Y CARA enumerando todos sus casos. ¿Cuál es su probabilidad?

a) $E = \{(1, C), (1, +), (2, C), (2, +), (3, C), (3, +), (4, C), (4, +)\}$

La probabilidad de cada caso es la misma, $\frac{1}{8}$.

b) BOLA VERDE Y CARA = $\{(1, C), (2, C), (3, C)\}$

$P[\text{BOLA VERDE Y CARA}] = \frac{3}{8}$

3. Operaciones con sucesos.

En el experimento que consiste en extraer una carta de baraja española, se consideran los siguientes sucesos:
A = “Salir un as”
B = “Salir una copa”
C = “Salir un rey”
D = “Salir una figura”
Indica cuáles de ellos son compatibles y cuáles incompatibles.

4. Frecuencias absolutas y relativas.

Para jugar una partida al parchís, Luis ha fabricado un dado un poco chapucero. Elisa, para estudiar su comportamiento, lo ha lanzado 1 200 veces, obteniendo los resultados que se indican en la tabla:

CARA	1	2	3	4	5	6
Nº DE VECES	248	355	175	180	126	116

a) Halla la frecuencia relativa de cada una de las seis caras, expresando los resultados en forma de fracción y de decimal con tres cifras decimales.

b) Justifica que es razonable decir que las probabilidades de las caras son, aproximadamente:

$$P(1) \approx 0{,}2, \quad P(2) \approx 0{,}3, \quad P(3) \approx 0{,}15,$$
$$P(4) \approx 0{,}15, \quad P(5) \approx 0{,}1, \quad P(6) \approx 0{,}1$$

a) $fr(1) = \dfrac{248}{1\,200} = 0{,}207$ $\qquad fr(2) = \dfrac{355}{1\,200} = 0{,}296$

$fr(3) = \dfrac{175}{1\,200} = 0{,}146$ $\qquad fr(4) = \dfrac{180}{1\,200} = 0{,}15$

$fr(5) = \dfrac{126}{1\,200} = 0{,}105$ $\qquad fr(6) = \dfrac{116}{1\,200} = 0{,}097$

b) Es razonable aproximar las probabilidades de cada puntuación a la marcada, porque $fr(n) \approx P[n]$.

5. Construcción de diagramas en árbol correspondientes a experimentos compuestos. (Educación para los hábitos de consumo)

La familia de Carlos quiere salir unos días de vacaciones. En la información meteorológica han dicho que la probabilidad de que el viernes llueva es del 40%; el sábado del 30%; el domingo del 60% y el lunes del 50%. ¿Cuál es la probabilidad de que no les llueva ningún día?

Capítulo 3: Actividades de refuerzo de probabilidad y azar.

Están orientadas a aquellos alumnos que tienen dificultades en alcanzar los objetivos señalados. Cabría la posibilidad de dar a estos alumnos estas actividades en unas fichas aparte para que las vayan haciendo. Se pueden proponer las siguientes actividades:

1. Suceso contrario o complementario (Educación ambiental).

En un pequeño bosque solo hay 60 pinos y 50 abetos. Si se elige al azar un árbol, ¿cuál es la probabilidad de que sea pino?, ¿y de que sea abeto?, ¿qué relación existe entre ambas probabilidades?

2. Juegos de azar.

Una máquina tragaperras a lo largo de un día ha dado los siguientes premios:

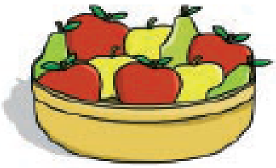
Premio en euros	Número de veces
0	625
10	10
50	3
100	1

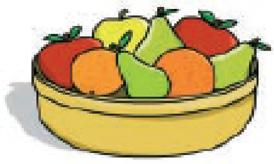
- ¿Cuántas veces han jugado a la máquina?
- ¿Cuál es la probabilidad de que la máquina no dé ningún premio?
- ¿Cuál es la probabilidad de obtener un premio de 50 euros?

3. Medida de probabilidad (Educación para la salud).

En cada uno de los siguientes experimentos aleatorios di cuál es la probabilidad de que ocurra el suceso que se indica.

a) CESTA I CESTA II

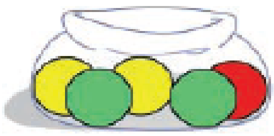


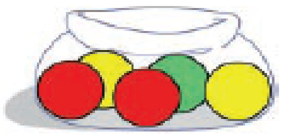


Se extrae una pieza de fruta.

Suceso: OBTENER UNA PERA.

b) BOLSA I BOLSA II

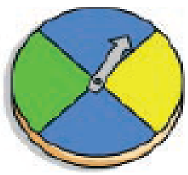


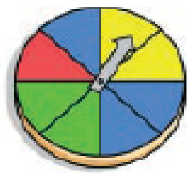


Se extrae una bola.

Suceso: OBTENER BOLA VERDE.

c) RULETA I RULETA II





Se hace girar la flecha y se observa sobre qué color se detiene.

Suceso: OBTENER COLOR AZUL.

a) CESTA I $\longrightarrow$ $P[\text{PERA}] = \frac{3}{10}$

CESTA II $\longrightarrow$ $P[\text{PERA}] = \frac{3}{8}$

b) BOLSA I $\longrightarrow$ $P[\text{VERDE}] = \frac{1}{5}$

BOLSA II $\longrightarrow$ $P[\text{VERDE}] = \frac{1}{5}$

c) RULETA I $\longrightarrow$ $P[\text{AZUL}] = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$

RULETA II $\longrightarrow$ $P[\text{AZUL}] = \frac{3}{8}$

4. Tabla de frecuencias.

Los alumnos de una clase se distribuyen del siguiente modo:

	CHICAS	CHICOS
CON GAFAS	3	6
SIN GAFAS	12	10

Escogemos al azar a una persona de esa clase. Calcula la probabilidad de que:

a) Sea chica.

b) Tenga gafas.

c) Sea una chica con gafas.

a) $P[\text{CHICA}] = \dfrac{15}{31}$

b) $P[\text{TENGA GAFAS}] = \dfrac{9}{31}$

c) $P[\text{CHICA CON GAFAS}] = \dfrac{3}{31}$

$$\bar{x} = \frac{2\,555}{40} = 63{,}87$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{165\,767}{40} - 63{,}87^2} = 8$$

5. Ejercicios sobre deportes.

En una bolsa hay siete balones de fútbol y cinco de baloncesto. Se extraen sin devolución tres balones de la bolsa. Halla la probabilidad de:

- Obtener tres balones de fútbol.
- Obtener tres balones de baloncesto.
- Obtener dos de fútbol y uno de baloncesto.
- Obtener dos de baloncesto y uno de fútbol.

Capítulo 4: Actividades de ampliación de probabilidad y azar.

Están dirigidas a aquellos alumnos que han alcanzado rápidamente los objetivos propuestos, que tienen curiosidad por el tema y que les gustaría saber más en algunos aspectos:

1. Frecuencias absoluta, relativa y probabilidad.

Una botella contiene 20 bolas de colores negro, rojo y verde. No sabemos cuántas de cada color, ni podemos verlo, porque la botella es opaca. Solo podemos ver, cuando la tumbamos, el color de la bola que queda junto al tapón, que es transparente.

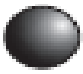
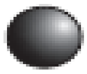
A lo largo de varios días hacemos 1 000 veces la experiencia de *agitar, inclinar la botella* y *anotar el color de la bola que se ve*. Hemos obtenido estos resultados:

$$f\left(\textcolor{black}{\bullet}\right) = 461 \quad f\left(\textcolor{red}{\bullet}\right) = 343 \quad f\left(\textcolor{green}{\bullet}\right) = 196$$

Podemos averiguar, con cierta seguridad, cuántas bolas hay de cada color. Hagámoslo con las negras:

$$fr\left(\textcolor{black}{\bullet}\right) = \frac{461}{1\,000} = 0{,}461$$

$$P\left(\textcolor{black}{\bullet}\right) = \frac{n}{20} \quad (n \text{ es número de bolas negras})$$

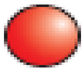
Como $fr\Big($  $\Big) = P\Big($  $\Big)$, hacemos:

$$0{,}461 = \frac{n}{20} \longrightarrow n = 20 \cdot 0{,}461 = 9{,}22$$

Estimamos que el número de bolas negras es 9.

¿Cuántas bolas de cada color hay en la botella?

$f\Big($  $\Big) = 343$

$fr\Big($  $\Big) = \dfrac{343}{1\,000} = 0{,}343$

$$0{,}343 = \frac{m}{20} \longrightarrow m = 0{,}343 \cdot 20 = 6{,}86$$

Suponemos que hay 7 bolas rojas.

$f\Big($  $\Big) = 196$

$fr\Big($  $\Big) = \dfrac{196}{1\,000} = 0{,}196$

$$0{,}196 = \frac{p}{20} \longrightarrow p = 0{,}196 \cdot 20 = 3{,}92$$

Podemos suponer que hay 4 bolas verdes.

2. Probabilidad de la unión e intersección de sucesos.

De 100 personas que fueron consultadas sobre sus prefencias a la hora de realizar un deporte, 50 practicaban fútbol, 40 practicaban baloncesto y 30 practicaban ciclismo. Además, 25 personas practicaban futbol y baloncesto, 15 practicaban fútbol y ciclismo, y 12 practicaban baloncesto y ciclismo. Por último, tan sólo 5 personas practicaban los tres deportes. El resto no sabe o no contesta. a) Representa el diagrama de Venn correspondiente.
b) Calcula las siguientes probabilidades: P(practicar fútbol), P(practicar fútbol y baloncesto), P(practicar sólo ciclismo), P(practicar los tres deportes), P(practicar alguno de los tres deportes), P(no practicar ninguno de los tres deportes).

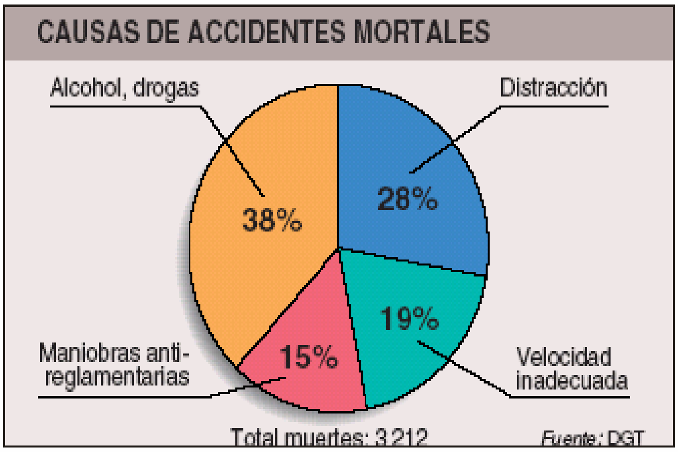
3. Probabilidad condicionada.

Un número es elegido al azar entre 1 y 100. Sabiendo que el número elegido es primo, ¿cuál es la probabilidad de que contenga la cifra 9?

Capítulo 5: Actividades de introducción de parámetros estadísticos.

1. Accidentes de tráfico (Educación vial).

Un diario publicó esta información:



a) ¿Cuántas personas murieron en accidentes cuya causa fue el alcohol o las drogas?

b) El 75% de las distracciones son fruto de la euforia o de la lentitud de reflejos que producen el alcohol y otras drogas. Según esto, ¿qué porcentaje de accidentes está relacionado con el alcohol y las drogas?

a) Se corresponden con el 38% de las 3 212 personas:

$3\,212 \cdot 0{,}38 \approx 1\,220$ personas murieron por causas del alcohol o las drogas.

b) Como el total de las distracciones son el 28%, calculamos el 75% de ese 28%.

$$0{,}28 \cdot 0{,}75 = 0{,}21$$

Entonces, el 21% del total son muertes producidas por distracción debido a la falta de reflejos motivada por el alcohol o las drogas.

El porcentaje de accidentes relacionados con las drogas y el alcohol es:

$$38 + 21 = 59\%$$

2. Interpretación de tablas.

Las opiniones que dieron un grupo de pacientes sobre dos de sus médicos fueron:

	MÉDICO A (%)	MÉDICO B (%)
BUENO	37,5	42
REGULAR	45	25
MALO	17,5	33

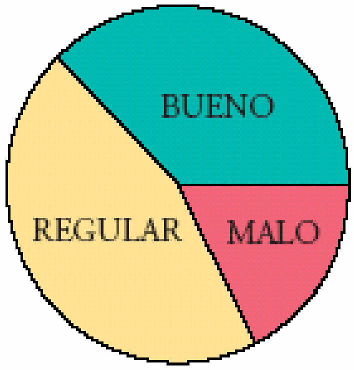
Haz un gráfico de sectores para cada médico y compáralos.

Transformamos los porcentajes en grados:

A $37{,}5\% \rightarrow \dfrac{37{,}5 \cdot 360}{100} = 135^\circ$

$45\% \rightarrow \dfrac{45 \cdot 360}{100} = 162^\circ$

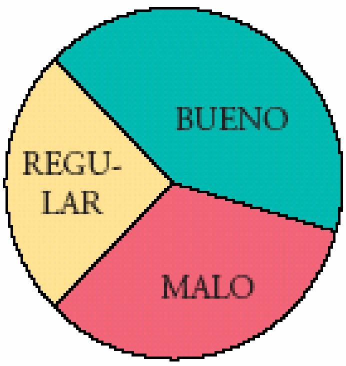
$17{,}5\% \rightarrow \dfrac{17{,}5 \cdot 360}{100} = 63^\circ$



B $42\% \rightarrow \dfrac{42 \cdot 360}{100} = 151{,}2^\circ$

$25\% \rightarrow \dfrac{25 \cdot 360}{100} = 90^\circ$

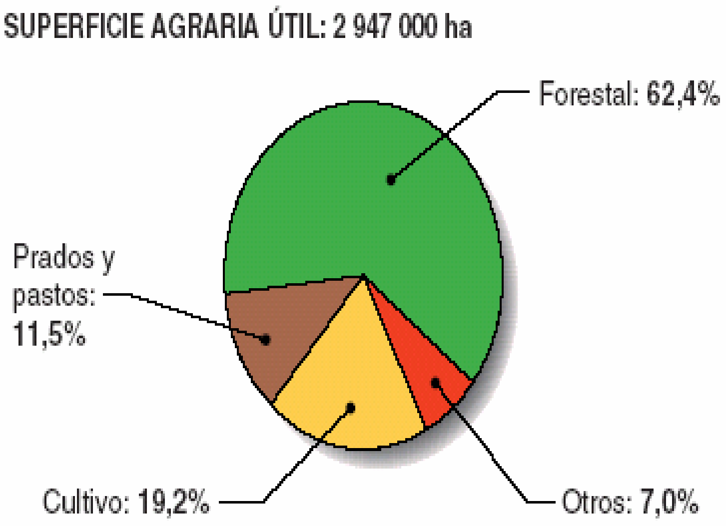
$33\% \rightarrow \dfrac{33 \cdot 360}{100} = 118{,}8^\circ$



Podemos deducir que el médico A es mejor valorado que el B.

3. Interpretación de gráficos (Educación ambiental).

Este gráfico muestra la distribución de la tierra en Galicia:



a) ¿Cuántas hectáreas ocupan los bosques?

b) De la superficie cultivada, el 23,5% se dedica al maíz. ¿Cuántas hectáreas ocupa el maíz?

c) Representa la distribución de la tierra en la Comunidad de Murcia y compárala con la de Galicia.

SUPERFICIE AGRARIA ÚTIL	CULTIVOS	FORESTAL	PRADOS Y PASTOS	OTROS
1 131 000 ha	53,4%	26,5%	1,9%	18,2%

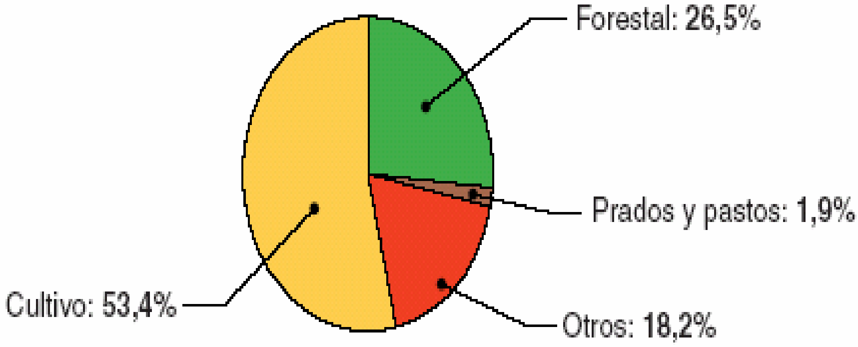
a) Los bosques ocupan un 62,4% del total: $2\,947\,000 \cdot 0{,}624 = 1\,838\,928$ ha

b) Calculamos el porcentaje de superficie dedicada al maíz: $0{,}192 \cdot 0{,}235 = 0{,}045$

Entonces, el 4,5% de la superficie total se dedica al maíz:

$$2\,947\,000 \cdot 0{,}045 = 132\,615 \text{ ha}$$

c)



Cultivo: 53,4% $\rightarrow \dfrac{53{,}4 \cdot 360}{100} = 192{,}2^{\circ}$

Forestal: 26,5% $\rightarrow \dfrac{26{,}5 \cdot 360}{100} = 95{,}4^{\circ}$

Prados y pastos: 1,9% $\rightarrow \dfrac{1{,}9 \cdot 360}{100} = 6{,}8^{\circ}$

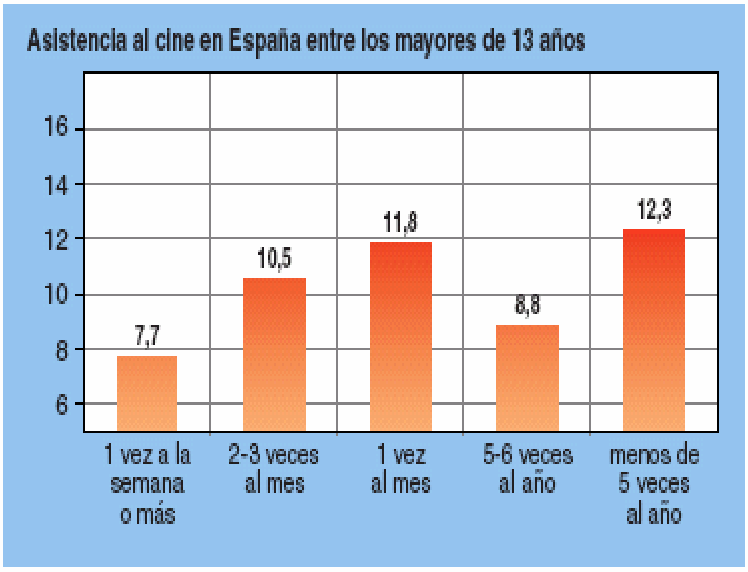
Otros: 18,2% $\rightarrow \dfrac{18{,}2 \cdot 360}{100} = 65{,}6^{\circ}$

En Murcia se dedica más terreno al cultivo y menos al terreno forestal, mientras que en Galicia es al revés.

En Murcia es mucho menor el porcentaje de terreno dedicado a prados y pastos que en Galicia (debido a que en Galicia hay más ganadería vacuna).

En Murcia es mayor el porcentaje de terreno sin un tratamiento concreto que en Galicia.

4. Asistencia al cine (Educación para la utilización del tiempo de ocio).



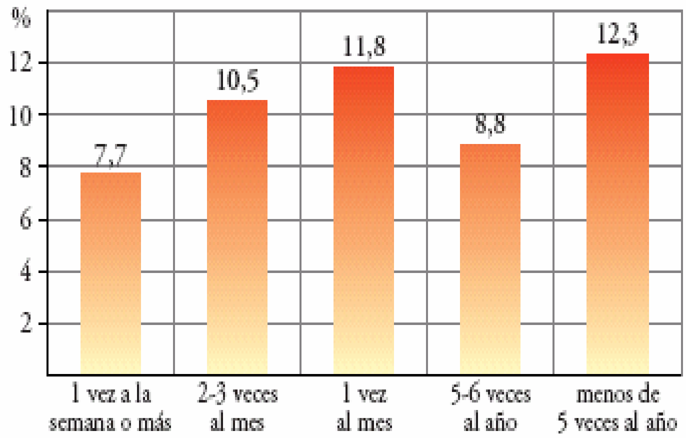
a) Observa que la primera barra es menor que la mitad de la última. ¿Significa esto que los que van al cine menos de 5 veces al año son más del doble que los que van una vez a la semana o más?

b) Repite la gráfica tomando la escala vertical desde 0.

c) ¿Qué porcentaje de españoles no va al cine nunca o casi nunca?

a) No. Observa que, en el eje vertical, hemos empezado en el 6%.

b)



c) El 12,3%, aproximadamente.

5. Media aritmética.

La edad media de las siete primeras personas que acudieron al cumpleaños del abuelo de Blanca es de 21 años. Después llegaron Luis y Ana, y la edad media creció a 23 años. Y al llegar el abuelo de Blanca, la edad media fue de 29 años. ¿Qué edad tiene el abuelo de Blanca?

Capítulo 6: Actividades de desarrollo de parámetros estadísticos.

1. Tipos de variables estadísticas.

Di, en cada caso, cuál es la población y cuál la variable que se quiere estudiar. Especifica si es una variable cualitativa o cuantitativa, determinando, en este último caso, si es discreta o continua:

a) Tiempo dedicado a las tareas domésticas por los hombres y las mujeres que trabajan fuera del hogar.

b) Estudios que quieren hacer las alumnas y los alumnos de un centro escolar al terminar la Educación Secundaria Obligatoria.

c) Intención de voto en unas elecciones autonómicas.

d) Horas que dedican a ver televisión los estudiantes de la Enseñanza Secundaria Obligatoria en España.

e) Número de aparatos de radio que hay en los hogares españoles.

	POBLACIÓN	VARIABLE	TIPO DE VARIABLE
a)	Hombres y mujeres	Horas dedicadas a las tareas domésticas	Cuantitativa continua
b)	Alumnos y alumnas de un centro escolar	Tipos de estudios	Cualitativa
c)	Posibles votantes	Tipo de voto	Cualitativa
d)	Estudiantes de la ESO en España	Horas dedicadas a ver la televisión	Cuantitativa continua
e)	Familias españolas	Número de aparatos de radio	Cuantitativa discreta

2. Media y desviación típica (Educación para la salud).

El entrenador de un equipo de baloncesto duda entre seleccionar a Elena o a María. Los puntos conseguidos por cada una, en una semana de entrenamiento, fueron estos:

ELENA	18	23	22	24	19	25	16
MARÍA	18	26	18	28	22	17	18

a) ¿Cuál de las dos tiene mejor media?

b) Calcula la desviación típica. ¿Cuál de las dos es más regular?

a) $\bar{x}_{\text{ELENA}} = \dfrac{\Sigma x_i}{n} = 21$

$\bar{x}_{\text{MARÍA}} = \dfrac{\Sigma y_i}{n} = 21$

Ambas tienen la misma media.

b) $\sigma_{\text{ELENA}} = \sqrt{\dfrac{3\,155}{7} - 21^2} = 3{,}11$

$\sigma_{\text{MARÍA}} = \sqrt{\dfrac{3\,205}{7} - 21^2} = 4{,}105$

Es más regular Elena, porque la dispersión de los datos (σ) es menor.

3. Frecuencias y diagrama correspondiente. Parámetros estadísticos.

A la pregunta: ¿cuántas personas forman tu hogar familiar?, 40 personas respondieron esto:

5	5	4	7	4
3	5	5	3	4

6	4	6	5	6
4	6	5	5	5

5	4	7	5	6
5	5	4	3	5

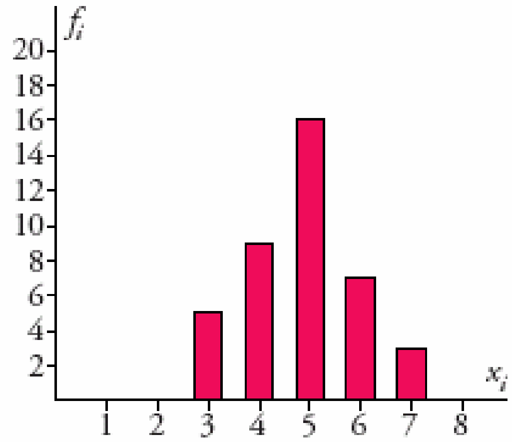
3	5	6	7	4
5	4	3	5	6

a) Haz la tabla de frecuencias y el diagrama correspondiente.

b) Calcula la media, la mediana, la moda y la desviación típica.

a)

x_i = NÚMERO DE PERSONAS	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
3	5	15	45
4	9	36	144
5	16	80	400
6	7	42	252
7	3	21	147
	40	194	988



b) $\bar{x} = \dfrac{194}{40} = 4{,}85$

$$\sigma = \sqrt{\frac{988}{40} - 4{,}85^2} = 1{,}08$$

$$Me = 5\ (\underbrace{3 \ldots 3}_{5 \text{ veces}},\ \underbrace{4 \ldots 4}_{9 \text{ veces}},\ \underbrace{5 \ldots 5}_{16 \text{ veces}},\ \underbrace{6 \ldots 6}_{7 \text{ veces}},\ \underbrace{7 \ldots 7}_{3 \text{ veces}};$$

en el lugar 20 y 21 hay un 5)

$Mo = 5$, porque es el dato que más veces se repite.

4. Datos de una distribución comprendidos entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$.

Se ha contado el número de letras que tienen las 128 palabras de un artículo:

LETRAS	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13
PALABRAS	4	36	14	9	15	7	6	9	7	8	6	4	3

a) Calcula la media y la desviación típica.

b) ¿Cuántas palabras tienen un número de letras comprendido entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$? ¿Qué porcentaje representan?

a)

x_i	f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
1	4	4	4
2	36	72	144
3	14	42	126
4	9	36	144
5	15	75	375
6	7	42	252
7	6	42	294
8	9	72	576
9	7	63	567
10	8	80	800
11	6	66	726
12	4	48	576
13	3	39	507
TOTALES	128	681	5 091

$$\bar{x} = \frac{681}{128} = 5{,}32 \;\; ; \;\; \sigma = \sqrt{\frac{5\,091}{128} - 5{,}32^2} = 3{,}38$$

b) El intervalo que va desde $\bar{x} - \sigma$ a $\bar{x} + \sigma$ es:

$$\left.\begin{array}{l} 5{,}32 - 3{,}38 = 1{,}94 \\ 5{,}32 + 3{,}38 = 8{,}7 \end{array}\right\} \text{ Tramo: } 1{,}94 - 8{,}7$$

Luego nos preguntan el número de palabras con más de una letra y menos de nueve letras: $36 + 14 + 9 + 15 + 7 + 6 + 9 = 96$ palabras

96 palabras están dentro del intervalo, que representan el $\frac{96 \cdot 100}{128} = 75\%$ de las palabras.

5. Población y muestra. Representatividad de una muestra.

Se quiere hacer un estudio sobre las tres aficiones preferidas de 16.500 chicos y 18.500 chicas.
¿Cuál es la población?
¿Cómo elegirías una muestra representativa formada por 2000 chicos y chicas?

Capítulo 7: Actividades de refuerzo de parámetros estadísticos.

Están orientadas a aquellos alumnos que tienen dificultades en alcanzar los objetivos señalados. Cabría la posibilidad de dar a estos alumnos estas actividades en unas fichas aparte para que las vayan haciendo. Se pueden proponer las siguientes actividades:

1. Media y desviación típica de una variable cuantitativa discreta.

Calcula la media y la desviación típica de las edades de los estudiantes de una clase de inglés.

EDAD, x_i	13	14	15	16
Nº DE ALUMNOS, f_i	5	13	10	2

x_i	f_i	$f_i x_i$	$f_i x_i^2$
13	5	65	845
14	13	182	2548
15	10	150	2250
16	2	32	512
	30	429	6155

$$\bar{x} = \frac{429}{30} = 14{,}3$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{6155}{30} - 14{,}3^2} = 0{,}82$$

2. Media y desviación típica de una variable cuantitativa contínua.

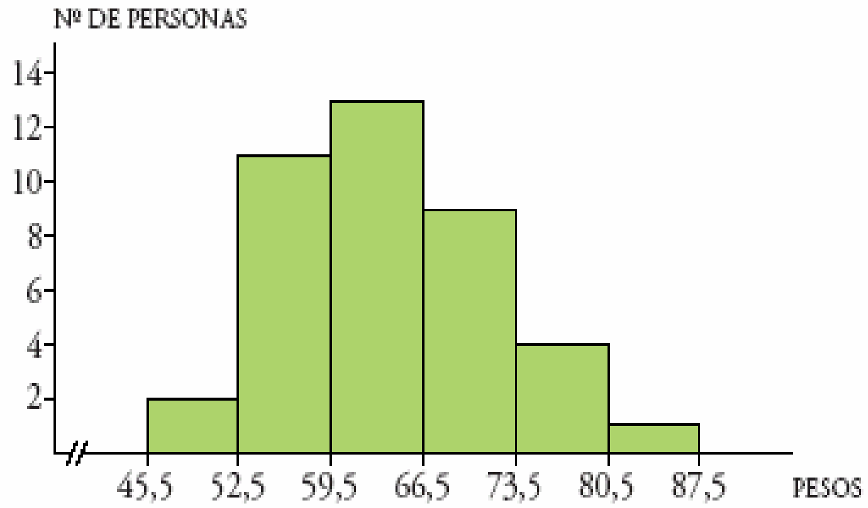
Los pesos de 40 personas son los siguientes:

a) Representa estos datos con el gráfico adecuado.

b) Calcula la media y la desviación típica.

PESO (kg)	NÚMERO DE PERSONAS
45,5 – 52,5	2
52,5 – 59,5	11
59,5 – 66,5	13
66,5 – 73,5	9
73,5 – 80,5	4
80,5 – 87,5	1

a) El gráfico adecuado es un histograma de frecuencias:



b)

PESO (kg)	MARCAS DE CLASE: x_i	NÚMERO DE PERSONAS: f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
45,5 – 52,5	49	2	98	4 802
52,5 – 59,5	56	11	616	34 496
59,5 – 66,5	63	13	819	51 597
66,5 – 73,5	70	9	630	44 100
73,5 – 80,5	77	4	308	23 716
80,5 – 87,5	84	1	84	7 056
TOTALES		40	2 555	165 767

$$\bar{x} = \frac{2\,555}{40} = 63{,}87$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{165\,767}{40} - 63{,}87^2} = 8$$

3. Encuesta.

Se ha hecho una encuesta para saber con qué regularidad se lee el periódico en una ciudad, y los resultados fueron estos:

RESPUESTAS	%
Todos los días	37,3
Una vez por semana	29
Una vez al mes	10,5
Alguna vez al año	12
Nunca	...
No contesta	0,4

a) ¿Qué tanto por ciento de personas respondieron "nunca"?

b) Si las personas que no contestaron fueron 6, ¿cuántas personas fueron encuestadas?

c) Las personas encuestadas, ¿son muestra o población?

a) La suma de todos los porcentajes ha de ser 100%. Exceptuando los que han contestado "nunca", los porcentajes suman:

$$37{,}3 + 29 + 10{,}5 + 12 + 0{,}4 = 89{,}2\%$$

Luego el porcentaje de los que contestaron "nunca" es: 100 – 89,2 = 10,8%

b) Las 6 personas que no contestaron representan el 0,4%. Entonces, como el total de personas representan el 100%:

$$\frac{100\% \cdot 6}{0{,}4\%} = 1\,500 \text{ personas fueron encuestadas.}$$

c) Si la ciudad tiene más de 1 500 habitantes, se tomó una muestra, ya que solo 1 500 personas son las encuestadas.

4. Estudio estadístico guiado de una distribución.

El contenido en mililitros de 50 botellas de un litro de gaseosa viene dado por la siguiente tabla:

Contenido en ml	[910,930)	[930,950)	[950,970)	[970,990)	[990,1010)	[1010,1030)
Número botellas	2	7	12	16	9	4

Elabora la tabla de frecuencias absolutas y acumuladas.
Representa el histograma de frecuencias absolutas y el polígono de frecuencias absolutas. ¿Dónde se distribuyen las barras más "altas"?, ¿qué quiere decir esto?
Calcula la media, la moda y la mediana. ¿Se parecen mucho?, ¿por qué crees que ocurre esto?
Calcula la varianza y la desviación típica. ¿Qué puedes decir de la dispersión de la variable?, ¿es representativa de la muestra la media obtenida en el apartado anterior?

Capítulo 8: Actividades de ampliación de parámetros estadísticos.

Están dirigidas a aquellos alumnos que han alcanzado rápidamente los objetivos propuestos, que tienen curiosidad por el tema y que les gustaría saber más en algunos aspectos:

1. Datos de una distribución.

Estaturas aproximadas de 4 350 soldados:

ESTATURA (en m)	1,52	1,56	1,60	1,64	1,68	1,72	1,76	1,80	1,84	1,88
Nº DE SOLDADOS	62	186	530	812	953	860	507	285	126	29

Decimos que los soldados que tienen su estatura entre $\bar{x} + \sigma$ y $\bar{x} + 3\sigma$ son altos; si la tienen entre $\bar{x} - 3\sigma$ y $\bar{x} - \sigma$, son bajos, y son normales si la tienen entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$.

Di, aproximadamente, qué tanto por ciento de bajos, normales y altos hay.

ESTATURA (m) x_i	Nº SOLDADOS f_i	$x_i f_i$	$x_i^2 f_i$
1,52	62	94,24	143,2448
1,56	186	290,16	452,6496
1,60	530	848	1 356,8
1,64	812	1 331,68	2 183,9552
1,68	953	1 601,04	2 689,7472
1,72	860	1 479,2	2 544,224
1,76	507	892,32	1 570,4832
1,80	285	513	923,4
1,84	126	231,84	426,5856
1,88	29	54,52	102,4976
TOTALES	4 350	7 336	12 393,5872

$$\bar{x} = \frac{7\,336}{4\,350} = 1{,}68; \quad \sigma = \sqrt{\frac{12\,393{,}5872}{4\,350} - 1{,}68^2} = 0{,}07$$

Calculamos los intervalos:

Entre $\bar{x} + \sigma$ y $\bar{x} + 3\sigma$ $\rightarrow$ 1,75 – 1,89

Entre $\bar{x} - 3\sigma$ y $\bar{x} - \sigma$ $\rightarrow$ 1,47 – 1,61

Entre $\bar{x} - \sigma$ y $\bar{x} + \sigma$ $\rightarrow$ 1,61 – 1,75

Como la altura máxima es 1,88, estudiar el intervalo 1,75 – 1,89 es lo mismo que estudiar el intervalo 1,75 – 1,88: en este intervalo estarán aquellos que midan 1,76 o más, es decir: 507 + 285 + 126 + 29 = 947 soldados.

Como la altura mínima es 1,52, estudiar el intervalo 1,47 – 1,61 es lo mismo que estudiar el intervalo 1,52 – 1,61: según la tabla, en este intervalo estarán los que midan 1,60 o menos, es decir: 62 + 186 + 530 = 778 soldados.

En el intervalo 1,61 – 1,75 están los soldados que miden, según la tabla, entre 1,64 y 1,72, es decir: 812 + 953 + 860 = 2 625 soldados.

Ahora calculamos los porcentajes correspondientes:

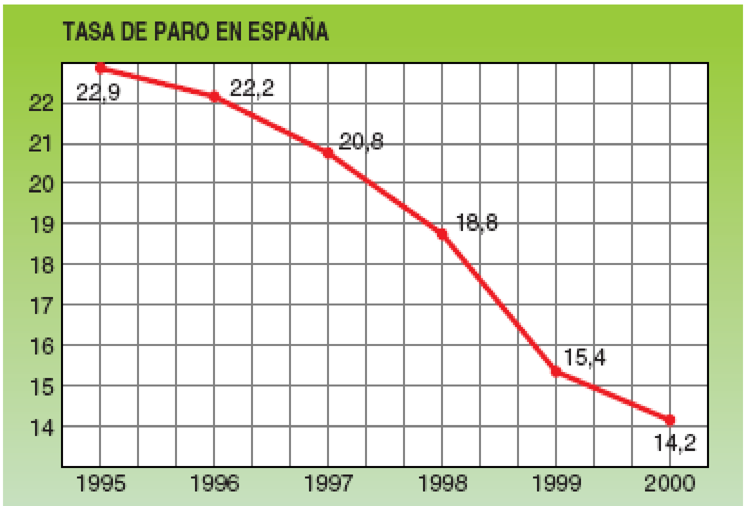
$$947 \rightarrow \frac{947 \cdot 100}{4\,350} = 21{,}77\% \text{ de soldados son altos.}$$

$$778 \rightarrow \frac{778 \cdot 100}{4\,350} = 17{,}88\% \text{ de soldados son bajos.}$$

$$2\,625 \rightarrow \frac{2\,625 \cdot 100}{4\,350} = 60{,}34\% \text{ de soldados son normales.}$$

2. Tendenciosidad en la presentación de datos.

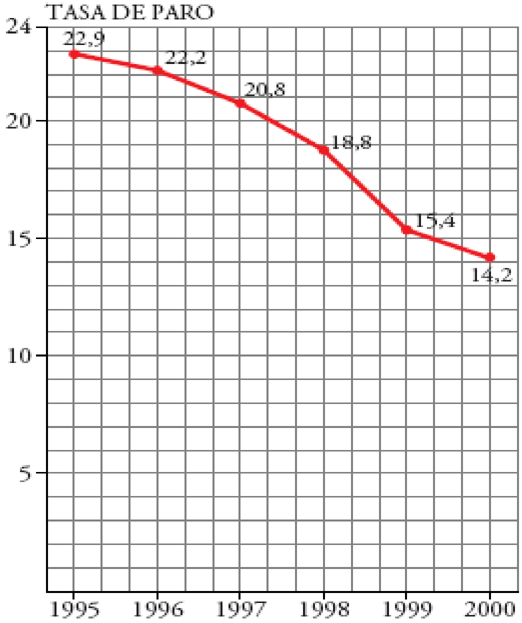
a) Representa esta misma gráfica tomando la escala del eje de ordenadas desde 0 hasta 24.



b) ¿Da la misma sensación de decrecimiento?

c) ¿Cuál crees que elegiría el gobierno y cuál la oposición para representar la tasa de paro?

a)



b) Con la nueva escala parece que decrece menos.

c) El gobierno elegiría la escala del enunciado, y la oposición elegiría la del apartado a).

3. Población y muestra.

En un grupo de 54000 chicos de 15, 16 y 17 años se realiza una encuesta a 1000 de ellos eligiendo a 250 de 15 años, 400 de 16 años y 350 de 17. ¿Cuál es el número total de chicos de cada edad si la muestra representativa de la población?

Sobre el autor

Raúl Núñez Cabello, Licenciado en Matemáticas. Universidad de Sevilla. (2001)

Experiencia docente:

Clases de Matemáticas e Informática de Educación Secundaria Obligatoria en el IES Francisco Rivero de Los Molares (Sevilla) durante todo el curso 2007/2008.

Clases de Matemáticas y Tecnología de Educación Secundaria Obligatoria en el colegio concertado Providencia del Sagrado Corazón en La Línea de la Concepción (Cádiz) durante todo el curso 2006/2007.

Prácticas del Curso de Adaptación Pedagógica (C.A.P.) en el I.E.S. Doménico Scarlatti de Aranjuez (Madrid) en Diciembre de 2004, impartiendo clases en 2º de bachillerato con el profesor-tutor D. José María Lorenzo Magam.

Amplia experiencia impartiendo clases en academias y a particulares de matemáticas a distintos niveles educativos, principalmente a niveles de secundaria obligatoria y bachillerato.

Elaboración de programaciones y unidades didácticas. Conocimiento de la estructura, objetivos y contenidos del sistema educativo.

Tareas de asesoramiento, orientación y coordinación de estudios matemáticos en el Colegio Mayor Guadaira (Sevilla).

Impartición de cursos sobre aprendizaje de distintas aplicaciones informáticas a sus usuarios finales en la Junta de Andalucía.

Teléfonos: 653574158; 605708429;
Correo electrónico: rncabello@gmail.com