5 Inecuaciones

1. Resuelve y representa sobre la recta real las soluciones de las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{5x-2}{3} - \dfrac{x-8}{4} > \dfrac{x+14}{2} - 2$

b) $\dfrac{x-3}{3} - \dfrac{x+5}{2} \leqslant \dfrac{x}{4} - 1$

2. Se desea obtener 60 kilos de una mezcla de café puro de 4,50 € el kilo y torrefacto de 2,50 € el kilo, de forma que el kilo de mezcla no supere los 3 € el kilo. ¿Cuántos kilos de café y torrefacto debemos mezclar?

3. Resuelve el siguiente sistema de inecuaciones y representa sus soluciones sobre la recta real:

$$\begin{cases} \dfrac{x+1}{3} - \dfrac{x-3}{2} \geqslant x - \dfrac{1}{2} \\ \dfrac{x-2}{2} - \dfrac{x-1}{3} \leqslant 1 + x \end{cases}$$

4. En unos grandes almacenes en época de rebajas, un vendedor le dice a un comprador lo siguiente: «En estos almacenes, por un artículo de 30 € usted pagará entre 21 € y 24 €». ¿Cuál puede ser el porcentaje de rebaja que se está aplicando?

5. Resuelve las siguientes inecuaciones y representa sus soluciones en la recta real:

a) $(2x-1)^2 - 2(x+1)(x-1) \leqslant 3(2-x)$

b) $4x(x+3) \geqslant 5(3-x)$

6. Determina para qué valores de m la ecuación $8x^2 - (m-1)x + m - 7 = 0$ tiene dos raíces reales. ¿En qué casos la ecuación tiene las raíces iguales?

7. Resuelve y representa las soluciones de las inecuaciones:

a) $\dfrac{1}{x-3} \geqslant \dfrac{2}{x+3}$

b) $\dfrac{x-2}{x+1} \leqslant \dfrac{x}{x-1} - 2$

8. Se desea enmarcar un lienzo sobre una tabla cuadrada cuyo precio es de 3 € el metro cuadrado, siendo el marco un junquillo metálico cuyo precio es de 3,75 € el metro lineal. Determina cuál debe ser como máximo el lado de la tabla si se dispone para ello de no más de 18 € de presupuesto.

9. Dibuja el recinto cerrado definido por el sistema de inecuaciones siguiente:

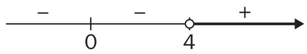
$$\{y \geqslant x;\ x + y \leqslant 4;\ x \geqslant 0;\ y \leqslant 3\}$$

y calcula su área, suponiendo que x e y están medidas en metros.

SOLUCIONES

1. a) Operando: $11x - 44 > 0$; $x - 4 > 0$; $x > 4$

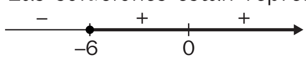
Solución: $(4, +\infty)$



b) Operando: $-5x - 30 \leqslant 0$; $x + 6 \geqslant 0$; $x \geqslant -6$

Solución: $[-6, +\infty)$

Las soluciones están representadas en la figura.



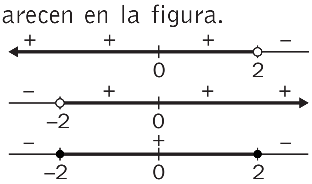
2. Si x es el número de kilos de café puro y $60 - x$ el número de kilos de torrefacto, se tiene:
$4{,}5x + 2{,}5(60 - x) < 3 \cdot 60 \longrightarrow 2x - 30 < 0 \longrightarrow$
$\longrightarrow x < 15$, indica que como máximo hemos de mezclar 15 kilos de café puro. Por otro lado:
$x < 15 \longrightarrow -x > -15 \longrightarrow 60 - x > 60 - 15 \longrightarrow$
$\longrightarrow 60 - x > 45$, lo que indica que como mínimo hemos de mezclar 45 kilos de torrefacto.

3. Operando:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{14 - 7x}{6} \geqslant 0 \\ \dfrac{-5x - 10}{6} \leqslant 0\end{array}\right\} \begin{array}{l}214 - 7x \geqslant 0;\ x \leqslant 2 \\ 5x + 10 \geqslant 0;\ x \geqslant -2\end{array}\Bigg\}$$

Solución: $[-2, 2]$

La solución del sistema y de cada inecuación que lo compone aparecen en la figura.



4. Sea x el porcentaje de rebaja, el precio del artículo es $30 - 30 \cdot \dfrac{x}{100} = 30 - 0{,}3x$; se tiene por tanto:

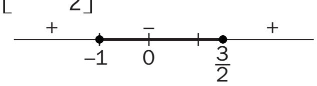
$21 \leqslant 30 - 0{,}3x \leqslant 24 \longrightarrow$

$$\longrightarrow \begin{cases} 21 \leqslant 30 - 0{,}3x \longrightarrow 0{,}3x \leqslant 9 \longrightarrow \\ \quad \longrightarrow x \leqslant 30\ \% \\ 30 - 0{,}3x \leqslant 24 \longrightarrow -0{,}3x \leqslant -6 \longrightarrow \\ \quad \longrightarrow x \geqslant 20\ \% \end{cases}$$

Los almacenes rebajan entre el 20 % y el 30 %

5. a) Operando: $2x^2 - x - 3 \leqslant 0$; $(x + 1)(2x - 3) \leqslant 0$

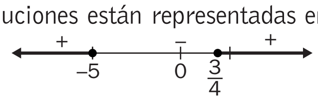
Solución: $\left[-1, \dfrac{3}{2}\right]$



b) $4x^2 + 17x - 15 \geqslant 0$; $(x + 5)(4x - 3) \geqslant 0$.

Solución: $(-\infty, -5] \cup \left[\dfrac{3}{4}, +\infty\right)$

Ambas soluciones están representadas en la figura.



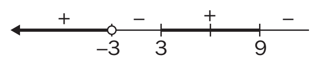
6. Para que la ecuación tenga dos raíces reales debe cumplirse: $(m - 1)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (m - 7) \geqslant 0$, por tanto:

$m^2 - 34m + 225 \geqslant 0$; $(m - 9)(m - 25) \geqslant 0$

$\begin{cases} m \geqslant 9 \ \text{y}\ m \geqslant 25;\ m \geqslant 25 \\ m \leqslant 9 \ \text{y}\ m \leqslant 25;\ m \leqslant 9 \end{cases}$. Por tanto, hay dos raíces reales si se verifica $m \leqslant 9$ o bien $m \geqslant 25$. Las dos raíces son iguales para $m = 9$ o para $m = 25$.

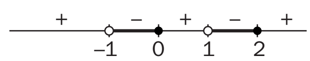
7. a) Operando: $\dfrac{1}{x - 3} - \dfrac{2}{x + 3} \geqslant 0$; $\dfrac{6 - x}{(x - 3)(x + 3)} \geqslant 0$.

Solución: $(-\infty, -3)$ y $(3, 6]$

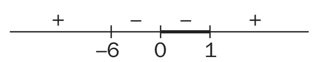


b) $\dfrac{x - 2}{x + 1} - \dfrac{x}{x - 1} + 2 \leqslant 0$; $\dfrac{2x(x - 2)}{(x + 1)(x - 1)} \leqslant 0$.

Solución: $(-1, 0]$ y $(1, 2]$



8. Longitud en metros del lado del cuadrado: $x > 0$.



Coste de la madera y el junquillo:

$$3x^2 + 3{,}75 \cdot 4x = 3x^2 + 15x\ €$$

Como no se dispone de más de 18 €, debe ser:

$$3x^2 + 15x \leqslant 18;\ 3x^2 + 15x - 18 \leqslant 0$$

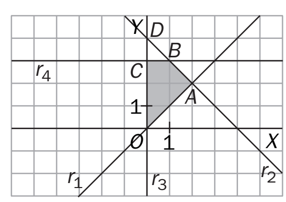
Factorizando:

$3(x - 1)(x + 6) \leqslant 0$; $(x - 1)(x + 6) \leqslant 0$; $-6 \leqslant x \leqslant 1$

Como $x > 0$, el mayor cuadrado tiene 1 m de lado.

9. El recinto es el interior cuadrilátero $OABC$ delimitado por las rectas:

r_1: $y = x$;
r_2: $x + y = 4$;
r_3: $x = 0$;
r_4: $y = 3$



Sus vértices tienen de coordenadas: $O(0, 0)$; $A(2, 2)$; $B(1, 3)$ y $C(0, 3)$, siendo el punto $D(0, 4)$. El área se calcula como diferencia de las áreas de 2 triángulos:

$$S_{OABC} = S_{OAD} - S_{CBD} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 2 - \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1 \longrightarrow$$
$$\longrightarrow S_{OABC} = 3{,}5\ m^2$$

5 Inecuaciones

CRITERIOS	ACTIVIDADES
A. Resolver inecuaciones lineales con una incógnita, aplicando procedimientos gráficos y analíticos.	1. Resuelve y representa gráficamente las soluciones de la inecuación: $$\frac{3x}{5}-\frac{x-6}{3}\leq\frac{x+9}{15}-1$$
B. Resolver gráficamente inecuaciones de 2.º grado por el procedimiento del factor.	2. Reduce a una desigualdad de 2.º grado la inecuación: $$x(2x+3)>x(x+2)+2(x+1)$$ Calcula sus soluciones por el procedimiento del factor.
C. Generalizar el método del factor para resolver otros tipos de inecuaciones con una incógnita.	3. Resuelve la siguiente inecuación: $$\frac{x+1}{x+2}\leq 3$$ 4. Calcula para qué valores de x no existe la raíz cuadrada del polinomio: $$P(x)=x^2-2x$$
D. Utilizar las inecuaciones para plantear y resolver de forma sencilla situaciones de la vida cotidiana.	5. En una familia, el abuelo tiene 60 años más que el menor de sus dos nietos, cuyas edades se diferencian en tres años. Calcula en qué período de sus vidas la edad del abuelo supera en 6 años al doble de la suma de las edades de sus nietos.
E. Resolver sistemas de inecuaciones con dos incógnitas e interpretar geométricamente las soluciones.	6. En las rebajas de una tienda se ponen a la venta 300 pantalones y 350 camisas. Se hacen dos ofertas: – La oferta A consta de un pantalón y una camisa. – La oferta B consta de un pantalón y dos camisas. ¿Cuántos lotes de cada tipo podrá confeccionar esa tienda?

SOLUCIONES

1. Se opera:

$9x - 5(x - 6) - (x + 9) + 15 \geqslant 0$
$3x + 36 \geqslant 0$
$x \geqslant -12$

Solución: $[-12, +\infty)$

2. Se opera:

$x(2x + 3) - x(x + 2) - 2(x + 1) > 0$
$x(2x + 3) - x(x + 2) - 2(x + 1) > 0$

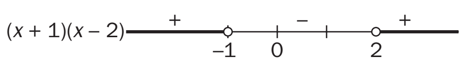
$x^2 - x - 2 > 0$
$(x + 1)(x - 2) > 0$

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 > 0 \\ x - 2 > 0 \end{array}\right\} x > 2$$

$$\left.\begin{array}{l} x + 1 < 0 \\ x - 2 < 0 \end{array}\right\} x < -1$$

Solución: $(-\infty, -1)$ y $(2, +\infty)$

Se representa:



3. Se opera:

$$\frac{x + 1}{x + 2} - 3 \leqslant 0$$

$$\frac{-2x - 5}{x + 2} \leqslant 0$$

$$\frac{2x + 5}{x + 2} \geqslant 0$$

Esta fracción será positiva para los valores de x que produzcan el mismo signo en sus dos términos, y será cero solo cuando lo sea el numerador.

Los dos positivos:

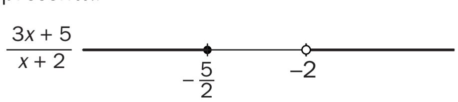
$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5 \geqslant 0 \\ x + 2 > 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x \geqslant -\dfrac{5}{2} \\ x > -2 \end{array}\right\} x > -2$$

Los dos negativos:

$$\left.\begin{array}{l} 2x + 5 < 0 \\ x + 2 < 0 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} x < -\dfrac{5}{2} \\ x < -2 \end{array}\right\} x < -\frac{5}{2}$$

Solución: $\left(-\infty, -\dfrac{5}{2}\right]$ y $(-2, +\infty)$

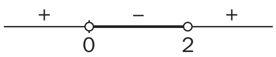
Se representa:



4. Debe cumplirse la desigualdad:

$x^2 - 2x < 0$
$x(x - 2) < 0$

Solución: los números del intervalo $(0, 2)$



5. Edad de los nietos: x, $x + 3$

Edad del abuelo: $x + 60$

Se plantea la inecuación:

$x + 60 > 2(x + x + 3) + 6$

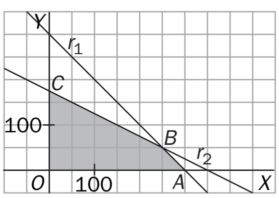
Se simplifica y se resuelve:

$3x - 48 < 0$
$x < 16$

Antes de que el nieto pequeño cumpla 16 años.

6. Siendo x e y el número de lotes de las ofertas A y B, respectivamente, se tiene:

$$\left.\begin{array}{l} x + y \leqslant 300 \\ x + 2y \leqslant 350 \\ x \geqslant 0 \\ y \geqslant 0 \end{array}\right\}$$



La solución son los puntos del interior del cuadrilátero de vértices:

$O(0, 0)$, $A(300, 0)$, $B(250, 50)$, $C(0, 175)$

5 Inecuaciones

1. Haz una representación gráfica de la recta de ecuación $y = 2 - x$; estudia, para los diferentes valores de x, el signo del binomio $2 - x$, y calcula las soluciones de la inecuación $2 - x \geqslant 0$.

2. Representa la gráfica de la parábola $y = x^2 - 2x - 3$; estudia, para los diferentes valores de x, el signo del trinomio $x^2 - 2x - 3$, y calcula las soluciones de la inecuación $x^2 - 2x - 3 \leqslant 0$.

3. Resuelve las siguientes inecuaciones de primer grado:

a) $6x - 7 \geqslant 4x + 3$

b) $2(1 - x) - 3 + 3(x - 2) < 1$

4. Plantea la inecuación que permite calcular cuáles son los números cuyo cuádruplo excede a su doble en más de 16 unidades y calcula de qué números se trata.

5. Resuelve las siguientes inecuaciones:

a) $\dfrac{x}{6} - 1 \leqslant 2 - \dfrac{1 - x}{3}$

b) $x^2 - x + 1 > (x - 1)(x + 3) + 4.$

6. Una persona puede comprar 6 revistas con 24 € y aún le sobra dinero, pero con 35 € no le llega para comprar 10 revistas. ¿Entre qué valores está comprendido el precio de una de esas revistas?

7. Resuelve por el procedimiento del factor las inecuaciones siguientes:

a) $x^2 \leqslant 2x$

b) $x^2 + 2x - 8 > 0$

8. Resuelve por el procedimiento del factor las inecuaciones siguientes:

a) $\dfrac{x^2 - x}{x - 2} > 0$

b) $\dfrac{8}{x} \leqslant 2x$

9. La nota final de Matemáticas es la media de las notas obtenidas en las tres evaluaciones. Si un alumno ha obtenido en las dos primeras evaluaciones 4 y 7, respectivamente, calcula cuál debe ser la nota de la tercera para obtener:

a) Como mínimo un notable como nota final (nota mayor o igual que 7).

b) Un suspenso como nota final (nota inferior a 5).

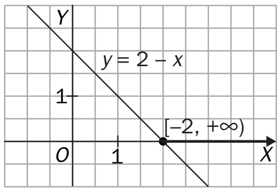
c) ¿Puede obtener sobresaliente (nota mayor o igual que 9)?

10. Resuelve y representa el conjunto solución del sistema de inecuaciones siguiente:

$$\begin{cases} 2x - y \geqslant 1 \\ x + y \leqslant 5 \\ x \geqslant 0 \\ y \leqslant 4 \end{cases}$$

SOLUCIONES

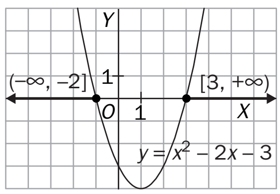
1. Representamos la recta. De la gráfica se deduce:



Si $x < 2$, $2 - x > 0$;
si $x = 2$, $2 - x = 0$;
si $x > 2$, $2 - x < 0$

La solución de $2 - x \geqslant 0$ es el intervalo $[2, +\infty)$.

2. Parábola convexa.
Corte con los ejes:



$(-1, 0)$, $(3, 0)$ y $(0, -3)$

Vértice: $(1, -4)$

De la gráfica se deduce:

Si $x < -1$ o $x > 3$,

$x^2 - 2x - 3 > 0$;

Si $-1 < x < 3$, $x^2 - 2x - 3 < 0$

La solución es $(-\infty, -1] \cup [3, +\infty)$

3. a) $6x - 4x \geqslant 3 + 7$
$2x - 10 \geqslant 0$

Solución: el intervalo $[5, +\infty)$

b) $2 - 2x - 3 + 3x - 6 < 1$
$x - 8 < 0$

Solución: el intervalo $(-\infty, 8)$

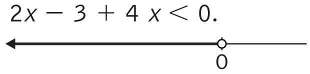
4. Si x es uno de esos números, como su cuádruplo es $4x$ y su doble es $2x$, se tiene que verificar la inecuación: $4x > 2x + 16$.

Resolviendo, $2x > 16 \Rightarrow x > 8$. La solución viene dada por el intervalo $(-8, +\infty)$.

5. a) $x - 6 \leqslant 12 - 2(1 - x)$
$x - 6 \leqslant 12 - 2 + 2x$
$x + 16 \leqslant 0$

Solución: $[-16, +\infty)$

b) $x^2 - x + 1 > x^2 + 2x - 3 + 4x < 0$.
Solución: $(-\infty, 0)$

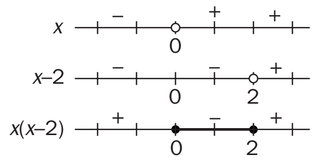


6. Si x es el precio en euros de cada revista, se tiene:

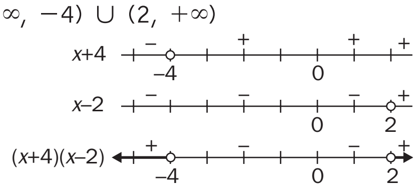
$$\left.\begin{array}{r} 6x \leqslant 24 \\ 10x > 35 \end{array}\right\} \begin{array}{l} x \leqslant 4 \\ x > 3{,}50 \end{array}$$

El precio x en euros es un número del intervalo $(3{,}50; 4]$, o bien $3{,}50 \text{ €} < x \leqslant 4 \text{ €}$.

7. a) $x^2 - 2x \leqslant 0$
$x(x - 2) \leqslant 0$
Solución: $[0, 2]$



b) $x^2 + 2x - 8 < 0$
$(x + 4)(x - 2) > 0$
Solución:
$(-\infty, -4) \cup (2, +\infty)$



8. a) Factorizamos: $\dfrac{x^2 - x}{x - 2} > 0 \Rightarrow \dfrac{x(x - 1)}{x - 2} > 0$

Solución: $(0, 1) \cup (2, +\infty)$

b) Operamos y factorizamos:

$$\frac{8}{x} - 2x \leqslant 0 \Rightarrow \frac{2(2 + x)(2 - x)}{x} \leqslant 0$$

Solución: $[-2, 0) \cup [2, +\infty)$

9. Sea x la nota obtenida en la 3.ª evaluación. La nota media final es $\dfrac{4 + 7 + x}{3} = \dfrac{11 + x}{3}$.

Por tanto:

a) $\dfrac{11 + x}{3} \geqslant 7 \Rightarrow 11 + x \geqslant 21 \Rightarrow x \geqslant 10$

Como no hay notas superiores a 10, debe obtener un 10.

b) $\dfrac{11 + x}{3} < 5 \Rightarrow 11 + x < 15 \Rightarrow x < 4$

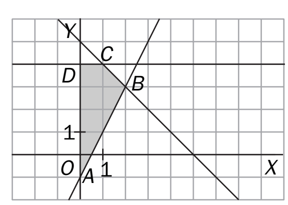
Debe obtener una nota inferior a 4.

c) $\dfrac{11 + x}{3} \geqslant 9 \Rightarrow 11 + x \geqslant 27 \Rightarrow x \geqslant 16$

Es imposible que obtenga sobresaliente.

10. La solución del sistema es el interior del cuadrilátero $ABCD$, cuyos vértices son los puntos de intersección de las rectas de ecuaciones:

r_1: $2x - y = 1$
r_2: $x + y = 5$
r_3: $x = 0$
r_4: $y = 4$



$A(0, -1)$; $B(2, 3)$;
$C(1, 4)$; $D(0, 4)$