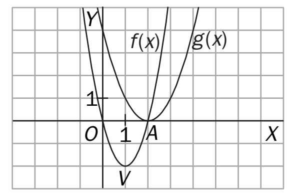
13 Funciones polinómicas

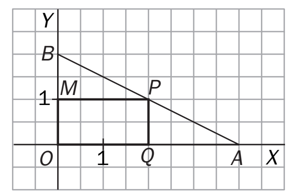
1. De dos parábolas cóncavas $f(x)$ y $g(x)$ se conocen los datos reseñados en la figura. Se pide:



a) Hallar las ecuaciones de las funciones correspondientes.

b) ¿Hay algún otro punto B distinto de A donde ambas gráficas se corten? Si es así, calcula las coordenadas de dicho punto B.

2. Sobre un segmento cuyos extremos son los puntos $A(4, 0)$ y $B(0, 2)$ se toma un punto $P(x, y)$ y, por él, se trazan un par de rectas paralelas a los ejes cartesianos. Halla las coordenadas del punto P de forma que el área del rectángulo $OMPQ$ sea la mayor posible.

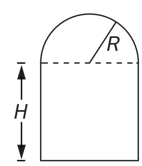


3. Dada la parábola de ecuación $y = x^2 + 2x - 3$, halla:

a) La ecuación de la recta s que la corta en los puntos de abscisas $x = -1$ y $x = 2$.

b) La ecuación de la recta t, tangente a la parábola y paralela a la recta s.

4. La figura muestra el marco de una ventana normanda, consistente en un rectángulo de altura H rematado en su parte superior por un semicírculo de radio R. Si el perímetro del marco es de 6 m, halla la superficie acristalada de esa ventana y el valor que debe darse al radio R para que entre la mayor claridad posible.



5. El valor V de una piedra preciosa es proporcional al cuadrado de su masa m, es decir, $V(m) = k \cdot m^2$, siendo k una constante que depende de las características de la gema. Se pide:

a) Probar que al dividir la piedra en dos trozos la gema se deprecia, es decir, pierde valor, calculando la depreciación $D(x)$ que sufre en función de la masa x de uno de los trozos.

b) Calcular cuándo la depreciación es máxima.

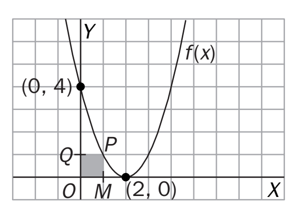
6. Dada la función polinómica $f(x) = x^2 - 3x^2$, represéntala gráficamente, calculando para ello:

a) Sus puntos de corte con los ejes, estudiando para los diferentes valores de la variable en qué intervalos la función toma valores positivos y en cuáles toma valores negativos.

b) Estudia en qué intervalos de la variable la función crece y en qué intervalos decrece, y deduce de ahí la existencia de máximos y mínimos relativos.

7. Se quiere cercar un campo rectangular mediante una valla, aprovechando un muro ya existente. Se sabe que la valla del lado opuesto al muro cuesta 6 € por metro, y la de los otros dos lados, 2 € por cada metro. Si el presupuesto disponible es de 1 200 €, halla el área del mayor recinto que puede cercarse.

8. La figura muestra la gráfica de una parábola $f(x)$, sobre la que se ha tomado un punto $P(x, y)$ tal que su abscisa verifica $0 \leqslant x \leqslant 2$. El punto P y el origen de coordenadas O son los vértices opuestos del rectángulo $OMPQ$ inscrito entre los ejes y la parábola. Se pide:



a) Determinar la expresión polinómica que define a la parábola $f(x)$.

b) Hallar la función $S(x)$ que permite calcular el área del rectángulo inscrito en función de x y calcular las coordenadas del punto P y el valor del área $S(x)$ para que el rectángulo sea un cuadrado.

SOLUCIONES

1. a) $\left\{\begin{array}{l} f(x) = ax^2 + bx, \text{ tal que } f(1) = -2,\ f(2) = 0 \\ \quad a = 2,\ b = -4 \\ g(x) = a(x-2)^2, \text{ tal que } f(0) = 4 \\ \quad a = 1 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} f(x) = 2x^2 - 4 \\ g(x) = (x-2)^2 \end{array}\right\}$

b) Cortes $f(x) = g(x)$; $(x-2)^2 = 2x(x-2)$;

$\left\{\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right.$ hay dos puntos de corte $\begin{array}{l} A(2,\ 0) \text{ y} \\ B(-2,\ 16) \end{array}$

2. AB: $\dfrac{x-4}{-4} = \dfrac{y}{2}$; AB: $x + 2y - 4 = 0$

$P(4-2y,\ y)$, de ahí $Q(4-2y,\ 0)$; $M(0,\ y)$, con $0 \leqslant y \leqslant 2$

Si S es el área del rectángulo, se tiene

$$S = OM \cdot OQ;\ S = 4y - 2y^2$$

parábola cóncava cuyo vértice tiene por abscisa

$$y = \frac{-4}{2 \cdot (-2)} = 1$$

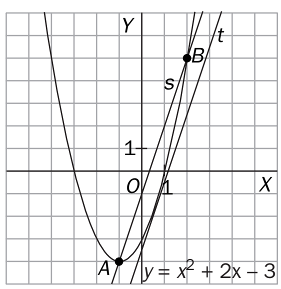
La solución es $P(2,\ 1)$.

3. La recta s está determinada por los puntos $A(-1,-4)$ y $B(2,\ 5)$ de pendiente

$$m_s = \frac{5-(-4)}{2-(-1)} = 3$$

Su ecuación es

$$3x - y - 1 = 0$$



La ecuación de t es $y = 3x + k$, y como t tiene un solo punto común con la parábola, la ecuación

$x^2 + 2x - 3 = 3x + k \equiv x^2 - x - (3 + k) = 0$

ha de tener una solución; por tanto,

$$(-1)^2 + 4(3 + k) = 0$$

$$k = -\frac{13}{4} \Rightarrow t\colon y = 3x - \frac{13}{4}$$

4. $\left.\begin{array}{l} \text{Perímetro } 3{,}14R + 2R + 2H = 6 \\ \text{Superficie } S = 2RH + 1{,}57\ R^2 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} H = 3 - 2{,}57R \\ S = 2R(3 - 2{,}57R) + 1{,}57\ R^2 \end{array}\right\} S = 6R - 3{,}57\ R^2$

La función área es una parábola cóncava cuyo vértice tiene de abscisa

$$R = -\frac{6}{2 \cdot (-3{,}57)} \approx 0{,}84 \text{ m y } H \approx 0{,}84 \text{ m}$$

5. a) Si dividimos la gema en dos trozos de masas x y $m - x$ de valores $V_1 = kx^2$ y $V_2 = k(m-x)^2$, respectivamente, la depreciación es

$D(x) = V - (V_1 + V_2) = km^2 - [kx^2 + k(m-x)^2]$

y, operando, $D(x) = 2kx(m - x)$.

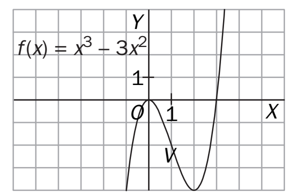
Como $0 < x < m$, resulta que $D(x) > 0$; por tanto, la gema se deprecia.

b) La función de depreciación $D(x) = 2kmx - 2kx^2$ es una parábola cóncava. El vértice es el punto de abscisa

$$x = -\frac{2km}{2 \cdot (-2k)} = \frac{m}{2}$$

La mayor depreciación se da al dividir la gema por la mitad.

6. a) El dominio es $\boldsymbol{R}$. Cortes con los ejes y signo de la función:



$\left\{\begin{array}{l} OX\colon f(x) = 0;\ x^2 - 3x^2 = 0;\ x = 0,\ x = 3 \\ OY\colon f(0) = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} (0,\ 0) \\ (3,\ 0) \end{array}$

$\left\{\begin{array}{l} f(x) > 0, \text{ si } x > 3 \\ f(x) < 0, \text{ si } x < 3,\ x \neq 0 \end{array}\right.$

b) $TVM_{[x,\ x+h]} = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$TVM_{[x,\ x+h]} = 3x^2 + 3x(h-2) + h(h-3) \longrightarrow$

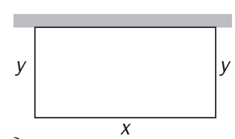
$\xrightarrow{\text{si } h \approx 0} TVM = 3x^2 - 6x$

Signo de TVM:

$\left\{\begin{array}{l} TVM > 0, \text{ si } x < 0 \text{ o } x > 2;\ f(x) \text{ crece} \\ TVM < 0, \text{ si } 0 < x < 2;\ f(x) \text{ decrece} \end{array}\right\}$

hay máximo en $x = 0$ y mínimo en $x = 2$.

7. Tomando como referencia las dimensiones del cercado de la figura, se tiene:



$\left.\begin{array}{l} \text{Presupuesto: } 4y + 6x = 1\,200 \\ \text{Superficie cercada: } S = xy \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} y = 300 - 1{,}5x \\ S = 300x - 1{,}5x^2 \end{array}\right\}$

La superficie viene definida por una parábola cóncava, cuyo máximo se obtiene para

$$x = -\frac{300}{2(-1{,}5)} = 100 \text{ m e } y = 150 \text{ m}$$

8. a) $f(x) = (x-2)^2$ (ver la solución del problema 1).

b) Al ser $P(x,\ y)$ un punto de la parábola, tiene por coordenadas $P[x,\ (x-2)^2]$; por tanto, los lados del rectángulo son $OM = x$ y $OQ = (x-2)^2$.

La función superficie del rectángulo es

$$S(x) = OM \cdot OQ = x(x-2)^2$$

Para ser un cuadrado:

$OM = OQ \longrightarrow\ x = (x-2)^2 \longrightarrow\ x^2 - 3x + 4 = 0$

$x = 1 \longrightarrow\ S(1) = 1$ unidad

$x = 4$ imposible ya que $x > 2$

13 Funciones polinómicas

CRITERIOS	ACTIVIDADES
A. Identificar las funciones polinómicas lineales y cuadráticas con sus gráficas y los elementos que las definen.	1. Representa en un mismo sistema de ejes las siguientes funciones polinómicas, hallando en cada caso sus puntos de corte con los ejes: a) $y = -2x + 6$ b) $y = -x^2 - 2x + 3$ 2. Halla el vértice y el eje de simetría de las parábolas definidas mediante las funciones: a) $y = 1 - 2(x - 4)^2$ b) $y = (x + 1)^2 - 9$
B. Hallar los puntos de corte con los ejes de una función polinómica cualquiera.	3. Halla los puntos de corte con los ejes de las siguientes funciones: a) $y = x^3 - 3x + 2$ b) $y = x^4 - 4x^2$
C. Calcular los puntos de corte de dos gráficas analítica y gráficamente.	4. Halla las coordenadas de los puntos donde se cortan las gráficas de la recta $y = 1 - 2x$ y de la parábola $y = x^2 - 3x - 1$. Indica gráficamente la región del plano comprendida entre ambas gráficas.
D. Representar funciones polinómicas de grados 3 o 4 y localizar sus puntos extremos en casos sencillos.	5. Representa gráficamente la función $y = x^3 + x^2$, localiza los posibles máximos y mínimos de la función y calcula aproximadamente las coordenadas de dichos puntos.
E. Cálculo de dominios y recorridos de funciones polinómicas.	6. Halla el dominio y el recorrido de las siguientes funciones: a) $y = x^2 + x - 6$ b) $y = x^4 + 1$
F. Utilizar las funciones polinómicas en la resolución de problemas.	7. Halla dos números cuya suma sea 20 sabiendo que su producto es máximo.

SOLUCIONES

1. a) Se trata de una recta cuyos puntos de intersección con los ejes son:

$$(3,\ 0),\ (0,\ 6)$$

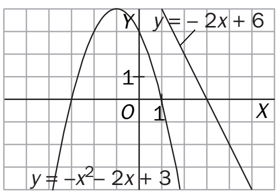
b) Es una parábola que corta a los ejes en los puntos: $(-3,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(0,\ 3)$

Su vértice está en el punto:

$$V(-2,\ 3)$$

Y es cóncava.

Representamos ambas funciones en un mismo sistema de ejes coordenados:



2. a) Vértice: $V(4,\ -1)$

Eje de simetría: $x = 4$

b) Vértice: $V(-1,\ -9)$

Eje de simetría: $x = -1$

3. a) Para $x = 0$, es $y = 2$.

Punto de corte con el eje OX: $(0,\ 2)$

Para $y = 0$, es $x^3 - 3x + 2 = 0$

Las raíces de esta ecuación son 1 y -2.

Puntos de corte con el eje OY: $(-2,\ 0)$, $(1,\ 0)$

b) Para $x = 0$, es $y = 0$.

Punto de corte con el eje OX: $(0,\ 0)$

Para $y = 0$, es $x^4 - 4x^2 = 0$; $x^2(x^2 - 4) = 0$

Las raíces de esta ecuación son 0, 2 y -2.

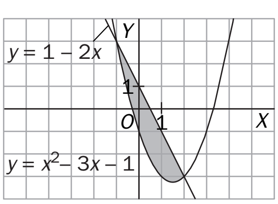
Puntos de corte con el eje OY: $(-2,\ 0)$, $(0,\ 0)$, $(2,\ 0)$

4. Se resuelve el sistema formado por las dos ecuaciones:

$$\left.\begin{aligned} y &= 1 - 2x \\ y &= x^2 - 3x - 1 \end{aligned}\right\} \quad \left\{\begin{aligned} x &= -1 \\ y &= 3 \end{aligned}\right. \quad \left\{\begin{aligned} x &= 2 \\ y &= -3 \end{aligned}\right.$$

Los puntos de corte de las dos funciones son:

$$(-1,\ 3),\ (2,\ -3)$$

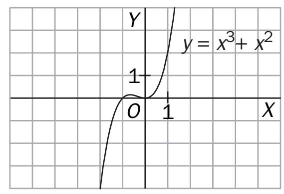


5. Puntos de corte con los ejes: $(-1,\ 0)$ y $(0,\ 0)$

Tabla de valores:

x	-2	-1	0	1	2
y	-4	0	0	2	12

Se representa aproximadamente la función:



Máximo en el intervalo $(-1,\ 0)$ y mínimo en $x = 0$.

Coordenadas:

Máxima $(-0{,}6;\ 0{,}14)$

Mínima $(0,\ 0)$

6. a) Dominio: $\boldsymbol{R}$

Recorrido: $\left(-\dfrac{1}{2},\ +\infty\right)$

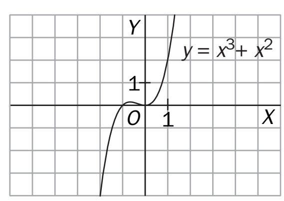
b) Dominio: $\boldsymbol{R}$

Recorrido: $(0,\ +\infty)$

7. Si x e y son los números, $y = 20 - x$.

El producto es $P(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$.

Representamos la función $P(x)$:



que alcanza el máximo si $x = 10$.

Solución: los números son $x = y = 10$

13 Funciones polinómicas

1. Dada la función $f(x) = 2x - 4$:

a) Calcula los valores: $f(-2)$; $f(1)$; $f\left(\frac{5}{2}\right)$

b) Calcula en cada caso el valor de x tal que: $f(x) = 0$; $f(x) = -6$; $f(x) = 2$.

2. Se considera la función polinómica de primer grado $f(x) = 4x + k$, de la que se sabe que su gráfica pasa por el punto de coordenadas $A(2, 5)$. ¿Cuál es el valor de k? Representa dicha función calculando sus puntos de corte con los ejes cartesianos.

3. La gráfica de una función es una recta que pasa por los puntos de coordenadas $A(3, 8)$ y $B(2, 5)$. Halla la ecuación de la función y el ángulo que forma la recta con el semieje positivo OX.

4. Dadas las funciones polinómicas de primer grado $f(x) = 3x - 5$ y $g(x) = \frac{4x}{3} + \frac{2}{5}$:

a) ¿Por qué punto P pasan las gráficas de ambas funciones?

b) Represéntalas, determinando previamente sus puntos de corte con los ejes.

5. Haz la representación gráfica de la parábola de ecuación $f(x) = x^2 + 4x - 5$, determinando previamente sus puntos de corte con los ejes y las coordenadas de su vértice V. Indica en qué intervalos los puntos de la gráfica tienen ordenada negativa.

6. Halla la expresión de todas las funciones polinómicas de segundo grado que corten al eje de abscisas en $x = -4$ y $x = 6$. ¿Cuál de esas funciones pasa por el punto $P(5, 18)$? Represéntala, calculando previamente su punto de corte con el eje de ordenadas.

7. Una parábola está definida a través de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bc + c$. Se sabe que su gráfica pasa por los puntos $A(1, 0)$, $B(2, 6)$ y $C(-2, -6)$. Calcula el valor de los parámetros a, b y c para que eso ocurra y haz una representación gráfica aproximada de la misma.

8. Un vendedor recibe dos ofertas de trabajo de una empresa:

Oferta A: 180 € de sueldo fijo y 1,50 € por cada unidad de producto vendido.

Oferta B: 210 € de sueldo fijo y 1 € por cada unidad de producto vendido.

a) Representa, en un mismo sistema de ejes, los ingresos I_A e I_B, colocando el número x de unidades vendidas en el eje de abscisas.

b) ¿Cuántas unidades debe vender para percibir los mismos ingresos en ambas ofertas? ¿A cuánto ascenderán en tal caso esos ingresos?

9. Con un alambre de 40 cm de longitud se desea construir un rectángulo.

a) Halla el área $S(x)$ de cada rectángulo construido en función de la medida x de uno de sus lados. ¿Cuál es el dominio de la función obtenida?

b) ¿Para qué valor de x se obtiene el rectángulo de mayor área?

SOLUCIONES

1. a) $f(-2) = 2 \cdot (-2) - 4 = -8$; $f(1) = 2 \cdot 1 - 4 = -2$

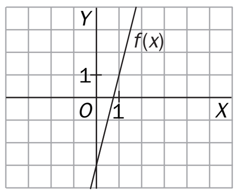
$f\left(\dfrac{5}{2}\right) = 2 \cdot \dfrac{5}{2} - 4 = 1$

b) $f(x) = 0 \Rightarrow 2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2$
$f(x) = -6 \Rightarrow 2x - 4 = -6 \Rightarrow x = -1$
$f(x) = 2 \Rightarrow 2x - 4 = 2 \Rightarrow x = 3$

2. Por ser A de la gráfica: $f(2) = 5$; $k = -3$

$f(x) = 4x - 3$

Puntos de corte con los ejes:



OX: $4x - 3 = 0$
$M\left(\dfrac{3}{4}, 0\right)$

OY: $4 \cdot 0 - 3 = -3$
$N(0, -3)$

3. La ecuación es $y = ax + b$, tal que:

$\left.\begin{array}{l} 3a + b = 8 \\ 2a + b = 5 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 3 \\ b = 1 \end{array}\right\} f(x) = 3x - 1$

La pendiente es $m = 3$; el ángulo α que forma con el semieje OX verifica: $\tan \alpha = 3$; $\alpha = 71° \ 33' \ 54''$

4. a) Igualando ordenadas se tiene:

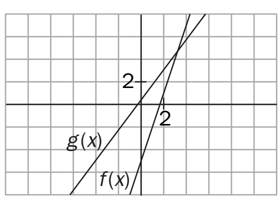
$3x - 5 = \dfrac{4x}{3} + \dfrac{2}{5} \Rightarrow x = \dfrac{81}{25}$; $f\left(\dfrac{81}{25}\right) = \dfrac{118}{25}$

El punto común es $P\left(\dfrac{81}{25}, \dfrac{118}{25}\right)$

b) Cortes con los ejes:

$A_f\left(\dfrac{5}{3}, 0\right)$ y $B_f(0, -5)$

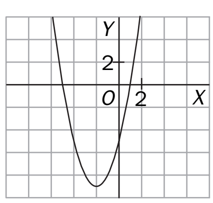
$A_g\left(-\dfrac{1}{2}, 0\right)$ y $B_g\left(0, \dfrac{2}{5}\right)$



5. Se trata de una parábola convexa.

Cortes con OX:
$x^2 + 4x - 5 = 0$
$x_1 = -5$ y $x_2 = 1$

Corte con OY: $f(0) = -5$



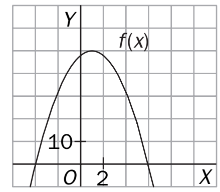
Vértice: $x_v = \dfrac{-5 + 1}{2} = -2$,

$y_v = f(x_v) = -10$, luego $V(-2, 10)$.

6. Son de la forma: $f(x) = a(x + 4)(x - 6)$; $a \neq 0$.
La que pasa por el punto $P(5, 18)$ es:

$a(5 + 4)(5 - 6) = 18$
$a = -2$
$f(x) = -2(x + 4)(x - 6)$

Corte con OY: $f(0) = 48$



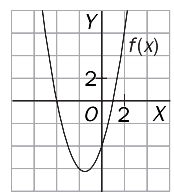
Vértice de la parábola: $x_v = \dfrac{-4 + 6}{2} = 1$,

$y_v = f(1) = 50$, luego $V(1, 50)$.

7. Como A es un punto de corte con OX, se tiene $f(x) = ax^2 + bx + c = (x - 1)(Mx + N)$. Por pasar por B y C:

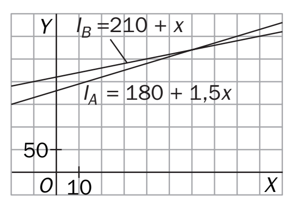
$\left.\begin{array}{r} f(2) = 6 \\ f(-2) = -6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2M + N = 6 \\ -3(-2M + N) = -6 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{l} M = 1 \\ N = 4 \end{array}\right\}$

luego $f(x) = (x - 1)(x + 4) = x^2 + 3x - 4$



8. a) Funciones de ingresos:
$I_A = 180 + 1{,}5x$ e $I_B = 210 + x$

b) $I_A = I_B$: $180 + 1{,}5x = 210 + x \Rightarrow x =$
$= 60$ unidades. En ese caso, $I_A = I_B = 270$ €.



9. a) Si x e y son las medidas de los lados del rectángulo, se tiene:

$2x + 2y = 40 \Rightarrow y = 20 - x$

y la función área es:

$S(x) = x(20 - x) = 20x - x^2$, cuyo dominio, dada la naturaleza del problema, es el intervalo abierto $(0, 20)$.

b) Siendo la función área la que corresponde a una parábola cóncava, su máximo valor corresponde al vértice de la misma, cuya abscisa es $x = -\dfrac{20}{2 \cdot (-1)} = 10$ cm.