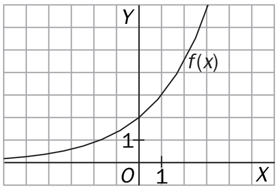
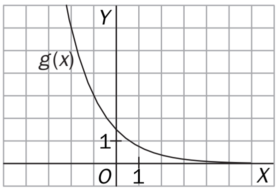
14 Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Se considera la función exponencial $f(x) = k^x$; $k > 0$. Averigua, en cada uno de los siguientes casos, cómo es la base de la función con respecto a la unidad (menor, igual o mayor):

a) $f(3) < 1$ b) $f(0{,}5) > 3$ c) $f(1) > 2$ d) $f(2) < 0$

2. En la figura se consideran las gráficas de dos funciones exponenciales que tienen como expresión $f(x) = a \cdot b^x$ y $g(x) = c \cdot d^x$, respectivamente. A partir de la información suministrada por esas gráficas, halla los valores que toma cada una de las funciones en el punto de abscisa $x = 2$, sabiendo que $f(x)$ toma el valor 6,75 para $x = 3$ y $g(x)$ toma el valor 3 para $x = -1$.





3. Halla, con un error inferior a una décima, las soluciones de las siguientes ecuaciones exponenciales:

a) $8^{-x^2} = \dfrac{1}{4}$ b) $2^{\frac{x+2}{x}} = 2^x$ c) $8^x = 5^{3-x}$

4. Aplica la definición de logaritmo para resolver las siguientes ecuaciones logarítmicas:

$$\log(11x - 1) = 1 \qquad \log\frac{2x}{x+1} = -2 \qquad \log\frac{x^2}{x+6} = 0$$

5. Para repoblar un lago de truchas se introdujo una cierta cantidad de individuos. Se sabe que a los tres años el número de truchas era de 4 000, y a los cinco años la población era de 8 000 truchas. Suponiendo que el crecimiento de la población de truchas sigue una ley exponencial, se pide:

a) ¿Cuántas truchas se introdujeron al principio?

b) Si, como consecuencia de ciertos vertidos nocivos en el lago, al final del quinto año la población se redujo a la cuarta parte, ¿cuántos años han de transcurrir para que el número de truchas sea el mismo que había al principio de ese año?

6. Un prestamista intenta convencer a sus clientes de que es mucho mejor contratar un préstamo al 1 % de interés mensual que contratar el mismo préstamo al 12 % anual. De esa forma, dice: «Se paga lo mismo, pero es más cómoda la devolución de la deuda mes tras mes que año tras año». Averigua qué resulta mejor para el cliente y qué es lo que se ‶trae″ entre manos el prestamista. Puedes analizarlo con un préstamo de 60 000 euros a 10 años, por ejemplo.

7. Aplica la definición de logaritmo para probar las siguientes propiedades de los logaritmos:

$$\log_a M \cdot N = \log_a M + \log_a N \qquad \log_a \frac{M}{N} = \log_a M - \log_a N \qquad \log_a M^p = p \cdot \log_a M$$

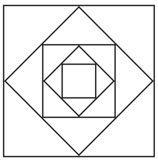
8. Se calcula que un bosque tiene 24 000 m^3 de madera y que aumenta a un ritmo del 3,5 % anual. Otro bosque tiene 48 000 m^3 de madera y su ritmo de crecimiento es el mismo que el del primero, se pide:

a) ¿Cuántos años han de transcurrir para que el primer bosque tenga la misma madera que el segundo?

b) ¿Son precisos el mismo número de años para que cada bosque triplique su contenido en madera?

Nota: Utiliza la calculadora y haz los cálculos por tanteo con aproximaciones de un año.

9. Tomando como vértices los puntos medios de los lados de un cuadrado de área A_0, se inscribe otro cuadrado. Si el proceso se continúa, obtenemos una serie de cuadrados inscritos cada uno en el anterior, tal como indica la figura. Se pide:



a) Hallar la función $A(n)$ que permite calcular el área del enésimo cuadrado de la serie.

b) Si el primer cuadrado tiene 1 m^2 de área, ¿cuál es el primer cuadrado cuya área es inferior a 1 cm^2?

SOLUCIONES

1. a) $f(3) < 1 \longrightarrow k^3 < 1 \longrightarrow k < 1$

b) $f(0,5) > 3 \longrightarrow k^{0,5} > 3 \longrightarrow k > 9 \longrightarrow k > 1$

c) $f(1) > 2 \longrightarrow k^1 > 2 \longrightarrow k > 1$

d) $f(2) < 0 \longrightarrow k^2 > 0$, imposible

2. $f(x) = a \cdot b^x \longrightarrow \left.\begin{array}{l} f(0) = 2 \\ f(3) = 6,75 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 2 = a \cdot b^0 \\ 6,75 = a \cdot b^3 \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{r} a = 2 \\ b = \sqrt[3]{6,75 : 2} = 1,5 \end{array}\right\} f(x) = 2 \cdot 1,5^x \longrightarrow$

$\longrightarrow f(2) = 4,5$

$g(x) = c \cdot d^x \longrightarrow \left.\begin{array}{l} g(-1) = 3 \\ g(1) = 0,75 \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} 3 = c \cdot d^{-1} \\ 0,75 = c \cdot d \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} d = \sqrt{0,75 : 3} = 0,5 \\ c = 0,75 : 0,5 = 1,5 \end{array}\right\} g(x) = 1,5 \cdot 0,5^x \longrightarrow$

$\longrightarrow g(2) = 0,375$

3. a) $8^{-x^2} = \dfrac{1}{4} \longrightarrow 4^{-2x^2} = 4^{-1} \longrightarrow -2x^2 = -1 \longrightarrow$

$\longrightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{1}{2}} \longrightarrow x_1 \approx -0,7;\ x_2 \approx 0,7$

b) $2^{\frac{x+2}{x}} = 2^x \longrightarrow \dfrac{x + 2}{x} = x \longrightarrow$

$\longrightarrow x^2 - x - 2 = 0 \longrightarrow x_1 = -1;\ x_2 = 2$

c) $8^x = 5^{3-x} \longrightarrow 8^x = 5^3 : 5^x \longrightarrow 40^x = 5^3 = 125 \longrightarrow$

$\longrightarrow x \approx 1,30$ (por tanteo con la calculadora).

4. $\log(11x - 1) = 1 \longrightarrow 11x - 1 = 10 \longrightarrow x = 1$

$\log \dfrac{2x}{x + 1} = -2 \longrightarrow \dfrac{2x}{x + 1} = 10^{-2} \longrightarrow$

$\longrightarrow 200x = x + 1 \longrightarrow x = \dfrac{1}{199}$

$\log \dfrac{x^2}{x + 6} = 0 \longrightarrow \dfrac{x^2}{x + 6} = 10^0 \longrightarrow$

$\longrightarrow x^2 - x - 6 = 0 \longrightarrow x_1 = -2;\ x_2 = 3$

5. Sea $P(t) = a \cdot b^t$ la función de crecimiento, se tiene

$P(t) = a \cdot b^t \left\{\begin{array}{l} P(3) = 4\,000 = a \cdot b^3 \\ P(5) = 8\,000 = a \cdot b^5 \end{array}\right\} \longrightarrow$

$\longrightarrow b^2 = 2 \longrightarrow \left\{\begin{array}{l} b = \sqrt{2} \\ a \approx 1\,414 \end{array}\right.$

a) El número de truchas iniciales es

$P(0) = a \approx 1\,414$ truchas

b) Al principio del sexto año, la función de crecimiento es $P(t) = 2\,000 \cdot \sqrt{2^t}$.

Si ha de ser $P(t) = 8\,000$, se tiene

$2\,000 \cdot \sqrt{2^t} = 8\,000 \longrightarrow \sqrt{2^t} = 4 \longrightarrow$

$\longrightarrow 2^{\frac{t}{2}} = 2^2 \longrightarrow t = 4$ años

6. Sean I_1 el interés que hay pagar al 12 % anual e I_2 el interés que hay que pagar al 1 % mensual, se tiene:

$I_1 = 60\,000 \cdot 1,12^{10} - 60\,000 \approx 126\,351$ euros e
$I_2 = 60\,000 \cdot 1,01^{120} - 60\,000 \approx 138\,023$ euros

Es más favorable para el cliente el pago anual, ya que supone un ahorro de $138\,023 - 126\,351 = 11\,672$ euros.

El prestamista pretende ganar más dinero con el mismo desembolso.

7. Sean $\left.\begin{array}{r} \log_a M = m \\ \log_a N = n \end{array}\right\} \left.\begin{array}{r} M = a^m \\ N = a^n \end{array}\right\}$

$$\left\{\begin{array}{l} M \cdot N = a^{m+n} \longrightarrow \log_a (M \cdot N) = m + n = \log_a M + \log_a N \\ \dfrac{M}{N} = a^{m-n} \longrightarrow \log_a \dfrac{M}{N} = m - n = \log_a M - \log_a N \\ M^p = a^{p \cdot m} \longrightarrow \log_a M_p = p \cdot m = p \cdot \log_a M \end{array}\right.$$

8. Sean $\begin{array}{l} A(t) = 24\,000 \cdot 1,035^t \text{ y} \\ B(t) = 48\,000 \cdot 1,035^t \end{array}$ las funciones de crecimiento de cada bosque:

a) Debe cumplirse

$A(t) = 48\,000 \longrightarrow 24\,000 \cdot 1,035^t = 48\,000 \longrightarrow$
$\longrightarrow 1,035^t = 2 \longrightarrow 20 < t < 21$, algo más de 20 años.

b) Debe cumplirse

$\left.\begin{array}{l} A(t) = 72\,000 = 24\,000 \cdot 1,035^{t_A} \\ B(t) = 144\,000 = 48\,000 \cdot 1,035^{t_B} \end{array}\right\}$

$\left.\begin{array}{l} 1,035^{t_A} = 3 \\ 1,035^{t_B} = 3 \end{array}\right\} t_A = t_B = t$, los mismos años.

9. Sean $L_0, L_1, L_2, \ldots$ y $A_0 = L_0^2, A_1 = L_1^2, A_2 = L_2^2, \ldots$ la sucesión de lados y áreas de los cuadrados de la serie. Por el teorema de Pitágoras, se tiene $L_1^2 = \left(\dfrac{L_0}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{L_0}{2}\right)^2 \longrightarrow A_1 = \dfrac{1}{2} \cdot A_0$. Como esta relación de áreas se cumple entre cada cuadrado y el precedente, se tiene:

a) $A_n = \dfrac{1}{2} \cdot A_{n-1} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \cdot A_{n-2} = \dfrac{1}{2} \cdot \dfrac{1}{2} \ldots \dfrac{1}{2} \cdot A_0$

Por tanto, $A(n) = A_0 \cdot 0,5^n$.

b) Se trata de resolver la inecuación $0,5^n < 0,0001$. Dando valores a n se tiene $0,5^{14} < 0,0001 < 0,5^{13}$ $n = 14$. Es el decimocuarto cuadrado inscrito.

14 Funciones exponenciales y logarítmicas

CRITERIOS

ACTIVIDADES

A. Reconocer las funciones de crecimiento exponencial.

1. Considera las siguientes funciones exponenciales:

$$\text{I. } a(x) = 2^x$$

$$\text{II. } b(x) = 2^{-x}$$

$$\text{III. } c(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{1-x}$$

$$\text{IV. } d(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^{-1-x}$$

Para cada una de ellas:

a) Construye una tabla de valores.

b) Indica si es creciente o decreciente.

c) Represéntala.

B. Saber trazar las gráficas de funciones exponenciales.

2. Dada la función $f(x) = 2^x + 2^{-x}$, se pide:

a) Estudiar si es par o impar.

b) Completar la siguiente tabla de valores:

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$							

c) Representarla gráficamente.

3. Calcula los valores de k, a y $f(-2)$ para que la gráfica de la función exponencial pase por los puntos $A(1, 10)$ y $B(3, 40)$.

C. Plantear y resolver problemas en los que incidan situaciones de crecimiento exponencial.

4. Se dispone de un capital de 4 000 euros que colocamos en un banco al 2,5 % de interés anual. ¿De qué capital dispondremos al cabo de 10 años? ¿Dentro de cuánto tiempo habremos conseguido unos intereses de 2 000 euros?

5. La masa en gramos de cierto isótopo radiactivo viene dada por la función $M(t) = 8 \cdot 2^{-0{,}00005t}$, siendo t el número de años transcurridos. ¿Al cabo de cuántos años la masa será de 2 gramos?

Si la vida media es el tiempo necesario para que el isótopo reduzca su masa a la mitad, ¿cuál es la vida media de ese isótopo?

D. Conocimiento básico de los logaritmos y su relación con la función exponencial.

6. Aplica la definición de logaritmo para calcular los siguientes logaritmos en las bases que se indican:

a) $\log_4 (2)$

b) $\log_{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{9}\right)$

c) $\log_{\frac{1}{5}} (125)$

d) $\log 0{,}001$

SOLUCIONES

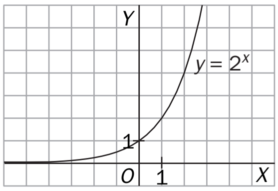
1. I. Función: $a(x) = 2^x$

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$a(x)$	0,125	0,25	0,5	1	2	4	8

b) Es creciente.

c)



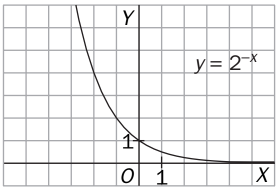
II. Función: $b(x) = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x = \dfrac{1}{a(x)}$

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
$a(x)$	8	4	2	1	0,5	0,25	0,125

b) Es decreciente.

c)



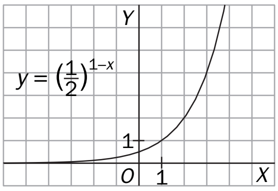
III. Función: $c(x) = \dfrac{1}{2} \cdot a(x)$

a)

x	-2	-1	0	1	2	3
$a(x)$	0,125	0,25	0,5	1	2	4

b) Es decreciente.

c)



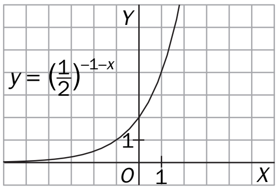
IV. Función: $d(x) = 2 \cdot a(x)$

a)

x	-3	-2	-1	0	1	2
$a(x)$	0,25	0,5	1	2	4	8

b) Es decreciente.

c)



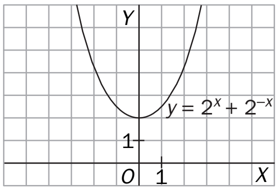
2. a) $f(-x) = 2^{-x} + 2^{-(-x)} = 2^x + 2^{-x} = f(x)$

Es una función par.

b) Basta con hallar valores positivos, ya que, por ser par, tiene simetría respecto del eje OY.

x	0	1	2	3
$f(x)$	5	2,5	4,25	8,125

b) Es positiva en todo su dominio.



3.

$$\left.\begin{array}{l} f(1) = 10 = k \cdot a \\ f(3) = 40 = k \cdot a^3 \end{array}\right\} \begin{array}{l} a^2 = 4 \\ k = \dfrac{10}{a} \end{array}\left.\vphantom{\begin{array}{l} a^2 \\ \dfrac{10}{a}\end{array}}\right\} \left.\begin{array}{l} a = 2 \\ k = 5 \end{array}\right\}$$

$$f(x) = 5 \cdot 2^x \qquad f(-2) = \frac{5}{4} = 1,25$$

4. Al cabo de t años dispondremos de:

$$C(t) = 4\,000 \cdot 1,025^t$$

Al cabo de 10 años dispondremos de:

$$C(10) = 5\,120,38 \text{ €}$$

Para conseguir unos intereses de 2 000 euros, necesitamos un tiempo t:

$6\,000 = 4\,000 \cdot 1,025^t \Rightarrow t = 16,42$

Solución: 16 años y 5 meses

5. Si la masa debe ser de 2 gramos y T es la vida media: $4 = 8 \cdot 2^{-0,0005T}$

De donde: $T = 2\,000$ años

Si la masa debe reducirse a la mitad:

$2 = 8 \cdot 2^{-0,0005t}$

$t = 6\,000$ años

6. a) $\log_4 (2) = a \Rightarrow 4^a = 2 \Rightarrow a = \dfrac{1}{2}$

b) $\log_{\sqrt{3}} \left(\dfrac{1}{9}\right) = b \Rightarrow \sqrt{3^b} = \dfrac{1}{9} \Rightarrow b = -4$

c) $\log_{\frac{1}{5}} (125) = c \Rightarrow \left(\dfrac{1}{5}\right)^c = 125 \Rightarrow c = -3$

d) $\log 0,001 = d \Rightarrow 10^d = 0,001$

$10^d = 10^{-3} \Rightarrow d = -3$

14 Funciones exponenciales y logarítmicas

1. Ordena de menor a mayor las siguientes potencias de base 2 y comprueba los resultados con ayuda de tu calculadora:

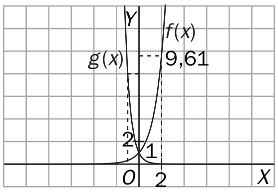
$$2^{-1};\ 2^{\sqrt{2}};\ 2^{-3};\ 2^{\frac{3}{2}};\ 2^{-2,5};\ 2^{\sqrt{3}}\ \text{y}\ 2^{1,7}$$

2. Resuelve las siguientes ecuaciones exponenciales:

$$4 \cdot 5^{1-3x} = 100 \qquad 8 \cdot 6^{x} = 3^{x} \qquad (4^{x} + 16)(3^{x} - 27) = 0 \qquad \sqrt{3\sqrt{3}} = 3^{2x+1}$$

3. Calcula los valores de k y a para que la función de crecimiento exponencial $f(x) = k \cdot a^{2x-1}$ pase por los puntos de coordenadas (0, 2) y (1, 18). La función resultante, ¿es creciente o decreciente? Haz un esbozo de su gráfica.

4. Dos funciones exponenciales $f(x)$ y $g(x)$ presentan las gráficas que se muestran en la figura.



a) ¿De qué funciones se trata?

b) Calcula los valores $f(-1)$, $f(3)$, $g(-3)$ y $g(1)$

5. Forma una tabla de valores enteros para representar la función $f(x) = 2^{x}$ y, a partir de ella, construye las gráficas de las funciones $g(x) = -1 + 2^{x}$ y $h(x) = 2^{x-2}$

6. Si colocas un capital de 1 000 euros a un interés anual del 3,5 %,

a) ¿Qué cantidad de dinero tendrás en 6 años? ¿Qué beneficio habrás obtenido?

b) ¿En cuántos años se doblará el capital: 10, 15, 20, 25, 30, ... años? Utiliza el método ensayo/error.

7. Una población de bacterias se reproduce con arreglo a la siguiente ley de crecimiento: $P(t) = 1 + 3^{t-1}$, donde t representa el número de días transcurridos desde el inicio del cultivo, y $P(t)$, el número de bacterias, en miles, presentes en el cultivo, transcurridos t días desde su inicio. Calcula:

a) El número inicial de bacterias presentes al iniciar el cultivo.

b) El número de bacterias que se han generado entre el quinto y el décimo día de iniciar el cultivo.

8. Sean $f(t)$ y $g(t)$ dos funciones que permiten calcular los precios de los productos al cabo de t años. Si eres comprador, ¿cuál de las dos funciones prefieres que te apliquen? Justifica las respuestas en cada uno de los casos siguientes:

a) $f(t) = 2t, \quad g(t) = 2^{t}$

b) $f(t) = 0,2t, \quad g(t) = 0,2^{t}$

SOLUCIONES

1. Teniendo en cuenta que la función $f(x) = 2^x$ es creciente, se tiene:

$$-3 < -2{,}5 < -\ 1 < \sqrt{2} < \frac{3}{2} < 1{,}7 < \sqrt{3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow\ 2^{-3} < 2^{-2{,}5} < 2^{-1} < 2^{\sqrt{2}} < 2^{\frac{3}{2}} < 2^{1{,}7} < 2^{\sqrt{3}}$$

Comprobamos: $2^{-3} = 0{,}125$; $2^{-2{,}5} \approx 0{,}1768$;
$2^{-1} = 0{,}5$; $2^{\sqrt{2}} \approx 2{,}6651$; $2^{\frac{3}{2}} \approx 2{,}8284$;
$2^{1{,}7} \approx 3{,}249$; $2^{\sqrt{3}} \approx 3{,}322$

2. $4 \cdot 5^{1-3x} = 100 \Rightarrow 5^{1-3x} = 25 = 5^2 \Rightarrow$

$\Rightarrow 1 - 3x = 2 \Rightarrow x = -\dfrac{1}{3}$

$8 \cdot 6^x = 3^x \Rightarrow 8 = \left(\dfrac{3}{6}\right)^x \Rightarrow 2^3 = \left(\dfrac{1}{2}\right)^x \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 2^{-x} = 2^3 \Rightarrow x = -3$

$(4^x + 16)(3^x - 27) = 0 \xrightarrow{4^x + 16 > 0} 3^x - 27 = 0 \Rightarrow$

$\Rightarrow\ 3^x = 27 = 3^3 \Rightarrow x = 3$

$\sqrt{3\sqrt{3}} = 3^{2x+1} \Rightarrow (3 \cdot 3^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 3^{2x+1} \Rightarrow$

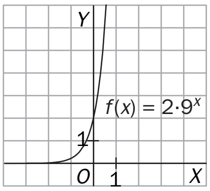
$\Rightarrow\ 3^{\frac{3}{4}} = 3^{2x+1} \Rightarrow 2x + 1 = \dfrac{3}{4} \Rightarrow x = -\dfrac{1}{8}$

3. $f(x) = k \cdot a^{2x-1}$; $\left\{\begin{array}{l} f(0) = k \cdot a^{-1} = 2 \\ f(1) = k \cdot a = 18 \end{array}\right\}$

$\dfrac{k \cdot a}{k \cdot a^{-1}} = 9 = 3^2 \Rightarrow a = 3;\ k = 6$

La función es:
$f(x) = 6 \cdot 3^{2x-1} =$
$= 2 \cdot 3 \cdot 3^{2x-1} = 2 \cdot 3^{2x} \Rightarrow$
$\Rightarrow\ f(x) = 2 \cdot 9^x$

Se trata de una función exponencial de base $9 > 1$, creciente.



4. a) Ambas funciones pasan por el punto (0, 1); por tanto, $f(x) = a^x$ y $g(x) = b^x$, tal que $a > 1$ y $b < 1$.

$f(2) = a^2 = 9{,}61 \Rightarrow a = \sqrt{9{,}61} = 3{,}1$

$f(x) = 3{,}1^x$

$g(-1) = b^{-1} = 8 \Rightarrow b = \dfrac{1}{8};\ g(x) = \left(\dfrac{1}{8}\right)^x = 8^{-x}$

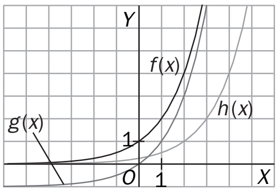
b) $f(-1) = 3{,}1^{-1} = 0{,}3226$;
$f(3) = 3{,}1^3 = 29{,}721$; $g(-3) = 8^3 = 512$;

$g(1) = \dfrac{1}{8} = 0{,}125$

5. La gráfica de $g(x)$ se obtiene desplazando hacia abajo la gráfica de $f(x)$ una unidad, y la gráfica de $h(x)$ se obtiene desplazando hacia la derecha la gráfica de $f(x)$ dos unidades.

De la tabla de valores para la función $f(x)$, se llega a las gráficas que se reproducen a continuacion:

x	$f(x)$
...	...
–3	1/8
–2	1/4
–1	1/2
0	1
1	2
2	4
3	6
...	...



6. a) Sea $C(t)$ el capital obtenido al cabo de t años, se tiene:

$C(t) = C_0(1 + r)^t \Rightarrow C(t) = 1\,000 \cdot 1{,}035^t$

$C(6) = 1\,000 \cdot 1{,}035^6 = 1\,292{,}26$ €

que es el capital obtenido en 6 años.

El beneficio es de unos 292,60 €.

b) Debe verificarse $2\,000 = 1\,000 \cdot 1{,}035^t = 2$, y, ensayando los valores de t, queda $t \approx 20$ años.

7. a) El número inicial es $P(0) = 1 + 3^{-1} = \dfrac{4}{3} = 1{,}333$ miles de bacterias, es decir, unas 1 333 bacterias.

b) Dicho número es $P(10) - P(5) = 1 + 3^9 - (1 + 3^4) = 3^9 - 3^4 = 19\,602$, es decir, 19 602 000 bacterias.

8. Calculamos las tasas de variación, en cada caso, de ambas funciones en t años. Se tiene:

a) $TV_f = f(t) - f(0) = 2t$

$TV_g = g(t) - g(0) = 2^t - 1$, si $t \geqslant 3$

de donde $TV_g > TV_f$, es preferible $f(t)$.

b) $TV_f = f(t) - f(0) = 0{,}2t$

$TV_g = g(t) - g(0) = 0{,}2^t - 1$, si $t \geqslant 1$

de donde $TV_f > TV_g$, es preferible $g(t)$.