

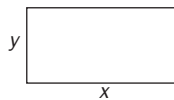
15 Funciones de proporcionalidad inversa

1. Dada la función $y = \frac{12}{x}$, halla su dominio y sus asíntotas. Confecciona una tabla de valores y haz su representación gráfica.
2. De cierta función $y = f(x)$ se ha obtenido la siguiente tabla de valores:

x	-6	-3	-2	0	1	4	9
y	3	6	9	error	-18	-4,5	-2

¿De que función se trata? ¿Cuáles son sus asíntotas? Representála.

3. La gráfica de la función $f(x) = \frac{1}{x}$ es la hipérbola equilátera más sencilla que se puede trazar y, a partir de ella, pueden trazarse por traslaciones las de otras hipérbolas más complejas, como, por ejemplo, las que representan las funciones $a(x) = \frac{1}{x} - 1$, $b(x) = \frac{1}{x + 1}$, $c(x) = \frac{1}{x - 2} + 3$, etc. Indica cómo construir la gráfica de cada una de ellas a partir de la de la hipérbola inicial. ¿Cuáles son sus asíntotas?
4. Halla la ecuación de las hipérbolas que verifican las siguientes condiciones:
 - a) Que tengan por asíntotas las rectas $x = -1$, $y = 2$.
 - b) Que tengan por asíntotas las rectas $x = 3$, $y = -2$ y pasen por el punto de coordenadas (5, 2).
5. Halla la ecuación de las siguientes hipérbolas:
 - a) La que tiene por centro el punto de coordenadas (2, 4). ¿Cuántas hay?
 - b) La que tiene por centro el punto de coordenadas (2, 4) y pasa por el punto de coordenadas (1, 3). ¿Cuántas hay?
6. El rectángulo de la figura de lados x cm e y cm tiene una superficie de 18 cm^2 . Calcula la función que relaciona los lados y represéntala gráficamente, a partir de una tabla de valores.



7. El producto de dos números x e y es -15 . ¿Qué tipo de función los relaciona? ¿Se trata de una función creciente o decreciente? ¿Cuál es su ecuación? Representála gráficamente.
8. Un coche tarda un tiempo t de 5 horas en recorrer un trayecto de 480 km a velocidad constante. ¿Cuál es su velocidad v en km/h? ¿Qué tipo de función relaciona las variables velocidad v y tiempo t ? Completa la tabla de valores siguiente:

x km/hora		80		160	
t horas	8		4		2

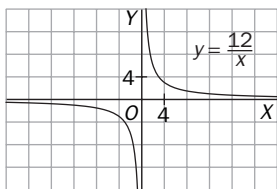
SOLUCIONES

1. Dominio $\mathbb{R} - \{0\}$; asíntotas: $x = 0, y = 0$

Tabla de valores

x	y
...	...
± 1	± 12
± 2	± 6
± 3	± 4
± 4	± 3
± 6	± 2
± 12	± 1
...	...

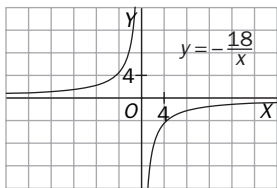
Gráfica



2. Las dos variables son inversamente proporcionales dado que $x \cdot y = k = -18$ es constante.

La función es $y = -\frac{18}{x}$

Se trata de una hipérbola, de asíntotas $x = 0, y = 0$.



3. a(x): asíntotas, $x = 0, y = -1$. Trasladando 1 unidad hacia abajo la gráfica de $f(x)$.

b(x): asíntotas, $x = -1, y = 0$. Trasladando 1 unidad a la izquierda la gráfica de $f(x)$.

c(x): asíntotas, $x = 2, y = 3$. Trasladando 2 unidades a la izquierda y 3 hacia arriba la de $f(x)$.

4. La ecuación general es:

$f(x) = \frac{k}{x-a} + b$, siendo k un número no nulo.

Las asíntotas son: $x = a, y = b$

a) $f_1(x) = \frac{k}{x+1} + 2$

b) $f(x) = \frac{k}{x-3} - 2$, tal que $2 = \frac{k}{5-3} - 2 \Rightarrow k = 8$

La ecuación es $f(x) = \frac{8}{x-3} - 2$

5. Las hipérbolas que tienen por centro el punto (a, b) tienen de ecuación $f(x) = \frac{k}{x-a} + b$, por tanto:

a) $f(x) = \frac{k}{x-2} + 4; k \neq 0$. Hay infinitas.

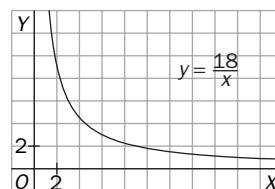
b) $f(x) = \frac{k}{x-2} + 4$, tal que $3 = \frac{k}{-1} + 4 \Rightarrow k = 1$ y la ecuación es $f(x) = \frac{1}{x-2} + 4$

6. Como $x \cdot y = 18 \Rightarrow y = \frac{18}{x}$, siendo $x > 0$.

Tabla de valores

x	y
1	18
2	9
3	6
6	3
9	2
18	1

Gráfica



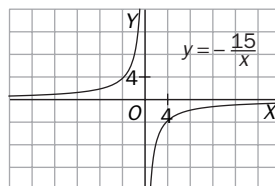
7. $x \cdot y = -15 \Rightarrow$

$\Rightarrow y = -\frac{15}{x}$, que es una

hipérbola del tipo

$f(x) = \frac{k}{x}; k < 0$, por tanto,

creciente, de asíntotas $x = 0$ e $y = 0$.

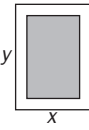


8. Las variables v y t son inversamente proporcionales, ya que $v \cdot t = 480 \Rightarrow v = \frac{480}{t} \Rightarrow v(5) = 96$ km/h.

De la relación anterior se tiene:

v km/hora	60	80	120	160	240
t horas	8	6	4	3	2

15 Funciones de proporcionalidad inversa

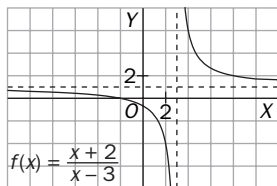
- Dada la función $y = \frac{x + 2}{x - 3}$, se pide:
 - Hallar los valores de a y b tal que la función se exprese en la forma $y = a + \frac{b}{x - 3}$.
 - Calcular sus asíntotas y haz la gráfica de la función obtenida.
- Calcula las asíntotas de la hipérbola de ecuación $f(x) = \frac{x + 1}{x - 1}$ y representa sobre un mismo sistema de ejes las funciones $f(x)$ y $g(x) = \left| \frac{x + 1}{x - 1} \right|$. Indica la tendencia creciente o decreciente de las dos funciones consideradas.
- Halla las asíntotas de la hipérbola de ecuación $y = \frac{ax + b}{cx + d}$; $c \neq 0$ sabiendo que pasa por los puntos de coordenadas $A(1, -1)$, $B(0, -4)$ y $C(2, 0)$. ¿Cuál es la tendencia creciente o decreciente de la función obtenida?
- Una persona deja escrito en su testamento que sus bienes se repartan entre sus tres sobrinos de forma inversamente proporcional a sus edades. Calcula cuánto recibe cada uno de ellos si al fallecer su tío tienen 15, 20 y 25 años, respectivamente, y el patrimonio de la herencia es de 47 000 euros.
- La figura muestra una hoja de papel de forma rectangular, de base x centímetros y altura y centímetros. La parte oscura está dedicada a colocar un texto impreso que ha de ocupar una superficie de 400 cm^2 . Determina la fórmula que permite calcular la altura de la hoja en función de la anchura, sabiendo que hay que dejar unos márgenes superior e inferior de 2 cm, y dos laterales de 3 cm. Representa gráficamente la función resultante.
 
- Al repartir un capital M de forma inversamente proporcional a las edades de tres hermanos: Antonio, de 3 años; Benito, de 5, y Carlos, de 10 años, respectivamente, la menor cantidad de dinero que se repartió fue de 42 euros. ¿A cuál de los tres hermanos le correspondió esa cantidad? ¿Cuánto dinero correspondió a los otros dos hermanos? ¿Qué cantidad se repartió?
- Un grifo, que arroja un caudal de 35 litros por minuto, tarda en llenar un depósito de agua 1 hora y 20 minutos. Se pide:
 - ¿Cuánto tiempo tardarían en llenar el depósito cuatro de esos grifos?
 - ¿Cuál debería ser el caudal de un grifo para llenar el depósito en 1 hora y 10 minutos?
- Considera la familia de hipérbolas de ecuación $y = \frac{k}{x}$, $k \neq 0$, y la recta r que pasa por los puntos $A(1, 0)$ y $B(0, 2)$. Calcula qué hipérbola de la familia es tangente a dicha recta y razona si la función que definen es creciente o decreciente.

SOLUCIONES

1. a) $y = \frac{x-3+5}{x-3} =$

$$= 1 + \frac{5}{x-3};$$

por tanto, $a = 1$ y $b = 5$.



b) Asíntotas: $x = 3$; $y = 1$. Corta a OX en $(-2, 0)$ y a OY en $(0, -\frac{2}{3})$

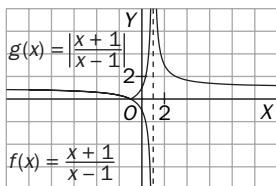
Su gráfica se muestra en la figura.

2. Para la gráfica de $f(x)$ se precisa conocer:

Dominio = $\mathbb{R} - \{1\}$.

Asíntotas: $x = 1$, $y = 1$

Corte con OX en $(-1, 0)$ y con OY en $(0, -1)$



Si $f(x) \geq 0$, las dos gráficas coinciden,

$$g(x) = |f(x)| = f(x)$$

Si $f(x) < 0$, cambiamos de signo las ordenadas

$$g(x) = |f(x)| = -f(x)$$

Las gráficas resultantes son las de la figura.

$f(x)$ es decreciente y $g(x)$ decrece siempre salvo en el intervalo $(-1, 1)$, donde resulta creciente.

3. Dividiendo por $c \neq 0$ se tiene $y = \frac{mx+n}{x+p}$, siendo $m = \frac{a}{c}$; $n = \frac{b}{c}$; $p = \frac{d}{c}$. El problema se reduce al cálculo de los tres parámetros m , n y p que verifican:

$$\left\{ \begin{aligned} -4 &= \frac{n}{p}; & -1 &= \frac{m+n}{1+p}; & 0 &= \frac{2m+n}{2+p} \end{aligned} \right\} \rightarrow$$

$$\rightarrow m = 2; n = -4; p = 1.$$

$$\text{Por tanto, } y = \frac{2x-4}{x+1} = \frac{2(x+1)-6}{x+1} \rightarrow$$

$$\rightarrow y = 2 - \frac{6}{x+1}, \text{ de tendencia decreciente igual}$$

que $y = \frac{k}{x}$, $k < 0$.

4. Sean A , B y C las cantidades que reciben los hermanos de 15, 20 y 25 años, respectivamente.

$$\text{Se tiene: } \left. \begin{aligned} A &= \frac{k}{15}; & B &= \frac{k}{20}; & C &= \frac{k}{25} \\ A + B + C &= 47\,000 \end{aligned} \right\}$$

$$\frac{k}{15} + \frac{k}{20} + \frac{k}{25} = 47\,000 \rightarrow \frac{47k}{300} = 47\,000 \rightarrow$$

$\rightarrow k = 300\,000$ y las cantidades que perciben son:

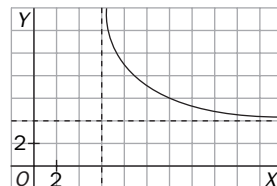
$$A = \frac{300\,000}{15} = 20\,000 \text{ €}; B = \frac{300\,000}{20} = 15\,000 \text{ €};$$

$$C = \frac{300\,000}{25} = 12\,000 \text{ €}.$$

5. De las condiciones del enunciado se tiene:

$$(x-6)(y-4) = 400$$

$$y = 4 + \frac{400}{x-6}$$



La parte del dominio que interesa de esta función es $\{x \in \mathbb{R} / x > 6\}$, según el contexto del problema. Se trata de una hipérbola decreciente que tiene por asíntotas las rectas $x = 6$ e $y = 4$, siendo su gráfica la de la figura.

6. Sean A , B y C las cantidades que reciben Antonio, Benito y Carlos. La menor cantidad es la de Carlos, el mayor de los tres ($C = 42$ €). Siendo k la constante de proporcionalidad inversa, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{k}{3}; & B &= \frac{k}{5}; & 42 &= \frac{k}{10} \\ A + B + C &= M \end{aligned} \right\}$$

$$k = 42 \cdot 10 = 420; A = \frac{420}{3} = 140 \text{ €};$$

$$B = \frac{420}{5} = 84 \text{ €}; M = 140 + 84 + 42 = 266 \text{ €}$$

7. El caudal del grifo y el tiempo de llenado son magnitudes inversamente proporcionales, por tanto:

a) Si t es el tiempo de llenado, en minutos, de los 4 grifos:

$$(4 \cdot 35) \cdot t = 35 \cdot (60 + 20) \rightarrow$$

$$\rightarrow t = 20 \text{ minutos}$$

b) Si x es el caudal necesario, en litros/minuto:

$$x \cdot (60 + 10) = 35 \cdot (60 + 20) \rightarrow$$

$$\rightarrow x = 40 \text{ litros/minuto}$$

8. Si es $y = mx + b$ la ecuación de la recta, se tiene:

$$\left. \begin{aligned} 0 &= m + b \\ 2 &= b \end{aligned} \right\} m = -2; b = 2 \rightarrow r: y = -2x + 2$$

La condición de tangencia exige que el sistema $\left\{ \begin{aligned} y &= -2x + 2; & y &= \frac{k}{x} \end{aligned} \right\}$ tenga solución única.

Iguando ordenadas:

$$-2x + 2 = \frac{k}{x} \rightarrow 2x^2 - 2x + k = 0 \rightarrow$$

$$\rightarrow (-2)^2 - 4 \cdot 2 \cdot k = 0 \rightarrow k = \frac{1}{2} > 0$$

La hipérbola de la familia tiene de ecuación $y = \frac{1}{2x}$, que resulta ser siempre decreciente.

15 Funciones de proporcionalidad inversa

CRITERIOS

A. Reconocer la relación de proporcionalidad inversa entre magnitudes y la relación funcional que las liga.

B. Conocer el comportamiento de la función de proporcionalidad inversa y su representación gráfica.

C. Saber calcular las asíntotas de una hipérbola cualquiera.

D. Saber representar hipérbolas por traslaciones de la gráfica de la función de proporcionalidad inversa.

E. Resolver problemas en los que incida la proporcionalidad inversa.

ACTIVIDADES

- En los siguientes ejemplos, indica cuándo se da una relación de proporcionalidad inversa:
 - El número de albañiles y el tiempo empleado en hacer el mismo edificio.
 - La velocidad de un coche y el trayecto recorrido en el mismo tiempo.
 - La velocidad de un coche y el tiempo empleado en recorrer el mismo trayecto.

2. Las magnitudes x e y de la tabla siguiente son inversamente proporcionales:

x	9	6		18
y		3	4	

- ¿Cuál es su constante de proporcionalidad?
- ¿Qué relación funcional presentan?
- Completa los valores que faltan en la tabla.

3. Dadas las funciones $f(x) = \frac{2}{x}$ y $g(x) = -\frac{3}{x}$:

- Represéntalas en un mismo sistema de ejes.
- Calcula sus asíntotas.
- Indica el comportamiento creciente o decreciente de cada una.

4. Calcula las asíntotas de las siguientes funciones y explica qué función de proporcionalidad inversa presenta el mismo comportamiento, creciente o decreciente, de cada una de ellas:

a) $a(x) = \frac{7}{x - 1}$

b) $b(x) = 2 - \frac{5}{x}$

c) $c(x) = 2 + \frac{3}{x + 2}$

5. Representa la gráfica de la función $f(x) = \frac{2}{x}$ y, mediante traslaciones paralelas a los ejes, representa la función $g(x) = -2 + \frac{2}{x - 1}$.

- En recolectar las uvas de un viñedo, 18 personas tardan 12 días. Se pide:
 - ¿Cuántos días tardarían en hacerlo el propietario y sus 3 hijos?
 - ¿Cuántos trabajadores se necesitarían para vendimiarla en 9 días?

SOLUCIONES

1. a) Son inversamente proporcionales, ya que con doble, triple... número de albañiles se tardará la mitad, tercera parte... de tiempo en construir el mismo edificio.
- b) Son directamente proporcionales, ya que, a tiempo constante, con doble, triple... velocidad, el coche recorrerá doble, triple... espacio.
- c) Son inversamente proporcionales, ya que, a espacio constante, con doble, triple... velocidad, el coche tardará la mitad, tercera parte... de tiempo en recorrerlo.

2. a) La constante es: $k = 6 \cdot 3 = 18$
- b) Se trata de una función de proporcionalidad inversa, donde $k = 18$.

La ecuación es: $y = \frac{18}{x}$

- c) Completamos la tabla:

$$9 \cdot a = 18; a = 2$$

$$b \cdot 4 = 18; b = 4,5$$

$$18 \cdot c = 18; c = 1$$

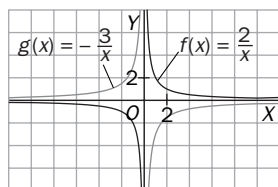
x	9	6	4,5	18
y	2	3	4	1

3. a) Formamos una tabla de valores para cada una de ellas:

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
f(x)	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	-	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$

x	-6	-4	-2	0	2	4	6
g(x)	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{3}{2}$	-	$-\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{4}$	$-\frac{1}{2}$

Hacemos la representación gráfica:



- b) Asíntotas: $x = 0$, $y = 0$, en ambas gráficas. Se han obtenido anulando los denominadores.
- c) La función $f(x)$ es decreciente, por ser $2 > 0$. La función $g(x)$ es creciente, por ser $-3 < 0$.

4. Anulando los denominadores, resultan las siguientes asíntotas:

$$a(x): x = 1, y = 0$$

$$b(x): x = 0, y = 2$$

$$c(x): x = -2, y = 2$$

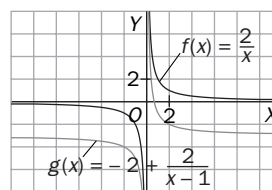
En cuanto al comportamiento, tenemos:

$$a(x) \text{ tiene el mismo comportamiento que } y = \frac{7}{x}$$

$$b(x) \text{ tiene el mismo comportamiento que } y = \frac{5}{x}$$

$$c(x) \text{ tiene el mismo comportamiento que } y = \frac{3}{x}$$

5. Partimos de la gráfica del ejercicio 3.



6. Si x es el número de personas y t el tiempo en días, las magnitudes son inversamente proporcionales de constante igual a

$$k = 18 \cdot 12 = 216$$

a) $4 \cdot t = 216$

$$t = 54$$

Tardarían 54 días.

b) $x \cdot 9 = 216$

$$x = 24$$

Se necesitarían 24 trabajadores.