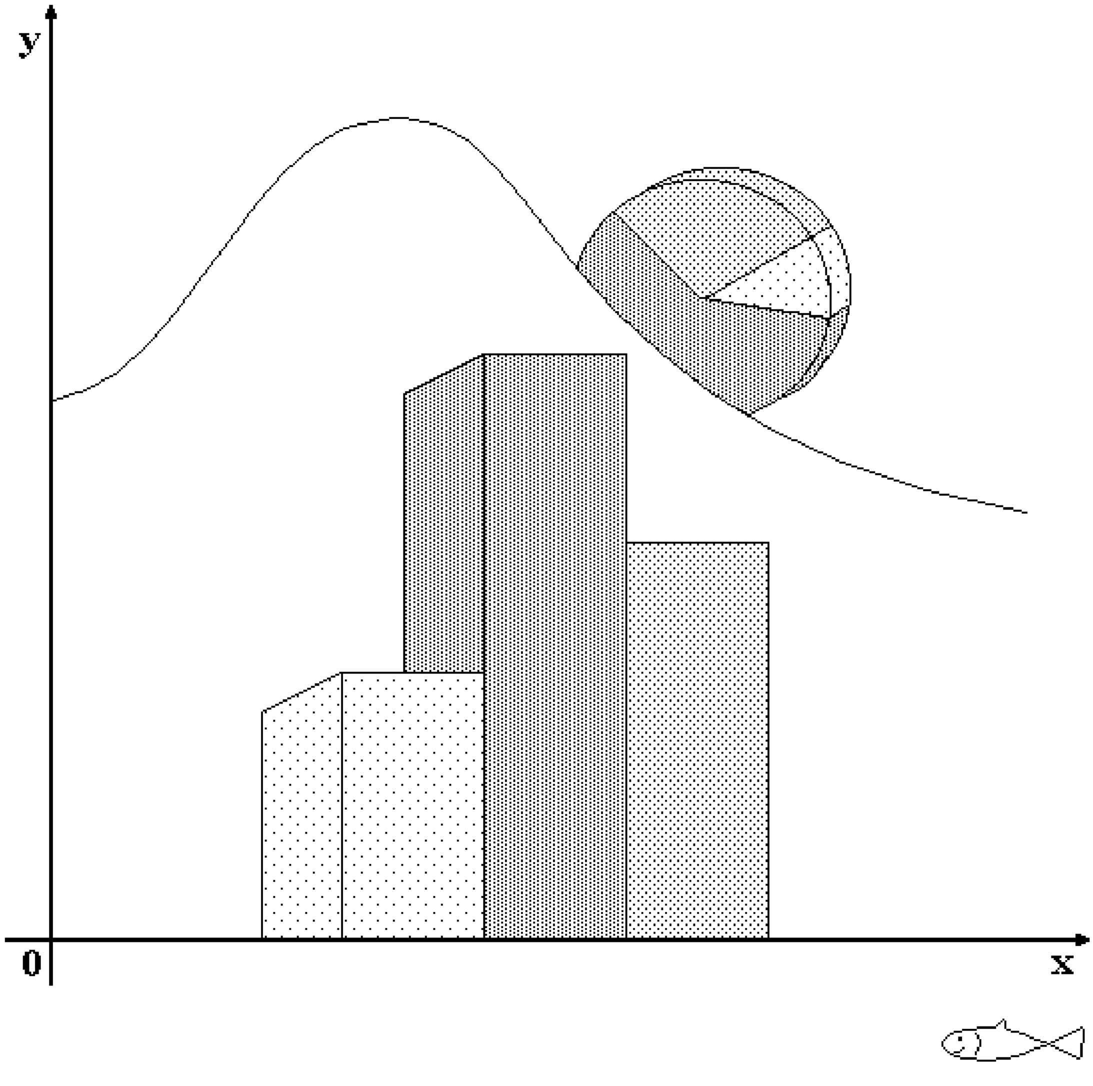
MATEMÁTICA

GUÍA DE APRENDIZAJE

FUNCIONES CUADRÁTICAS, EXPONENCIALES Y LOGARÍTMICAS



POLINOMIOS DE 2° GRADO

Unos polinomios especiales

Ya que podemos extender la radicación a todos los números reales, toman especial importancia los polinomios de segundo grado. Recordarás los distintos procesos vistos para **factorizar** polinomios. El propósito era conocer las **raíces**. Llegaremos ahora a una fórmula práctica que nos permita hallar **siempre** las raíces de los polinomios de segundo grado; además de brindarnos información importante para realizar su gráfica.

Sea por ejemplo el polinomio:

$$\mathbf{5\,x^2 - 3\,x + 2}$$

a) Señalar los términos **a** (cuadrático; **b** (lineal) y **c** (independiente) .
b) ¿ Pueden ser **a , b** o **c** iguales a cero ? ¿ Por qué?

____

____

La función asociada a un polinomio está formada por infinitos pares de valores que puede tomar dicho polinomio para diferentes valores de **x** (valor numérico).
c) En nuestro ejemplo , hallar el valor numérico para :

$x = 4$ ____

$x = 0$ _______________________________________

$x = -1$ _______________________________________

Un caso "especial" es cuando para $x = n$, es valor del polinomio es igual a **cero** .En este caso se dice que ***n es raíz del polinomio***. Si **n** es un número real, la función polinómica "cortará" al eje X en ese valor (¿ y si **no** es un número real, qué significará?).

EJERCICIOS

1) Verificar cuál de los siguientes valores corresponde a raíz del polinomio:

$$x^2 + 2x - 3$$

$n = 0$ $n = -3$ $n = 2$ $n = 1$

Nos interesa conocer un método para hallar las "raíces" de polinomios de 2° grado. Es decir, valores de **x** que hagan valer **cero** al polinomio; esto equivale a plantear la ecuación:

$$\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$$

que es la ecuación asociada al polinomio de 2° grado . Su resolución podrá resultar más o menos sencilla, esto dependerá de que sea incompleta (**b** o **c** iguales a cero), completa reducida (**a** = 1) o general completa.

Podemos encarar la resolución de la ecuación completa "reducida", intentando transformarla en un **trinomio cuadrado perfecto** (TCP).

d) Sea :

$x^2 + 4x - 12 = 0$

Para un TCP necesitamos - dos términos elevados al cuadrado
- un término que sea el doble del producto de los anteriores.

$$\underbrace{x^2}_{\text{término elevado al cuadrado}} + \underbrace{4x}_{\text{doble de x por ...?}} - 12 = 0$$

$$\underbrace{\left[(x)^2 + 2 \cdot \underbrace{x}_{1° \text{ término}} \cdot \underbrace{2}_{2° \text{ término}} + \underbrace{4}_{(2)^2} \right]}_{(x+2)^2} \underbrace{- 4 - 12}_{-16} = 0$$

¿ por qué se suma y resta 4?

$$(x + 2)^2 - 16 = 0$$

Ahora es sencillo "despejar" **x**:

$$(x + 2)^2 = 0 + \ldots$$

$$x + 2 = \sqrt{\ldots\ldots\ldots}$$

$$x + 2 = \pm \ldots\ldots$$

$$x = \pm \ldots\ldots - 2 \quad \begin{cases} x_1 = \ldots \\ x_2 = \ldots \end{cases}$$

verificar que sean raíces

<u>EJERCICIOS</u>

2) Resolver completando el cuadrado:

a) $x^2 + 6x + 5 = 0$

b) $x^2 - 16x + 64 = 0$

c) $x^2 + 2x + 10 = 0$

d) $x^2 - 10x + 26 = 0$

e) $x^2 + 14x + 48 = 0$

. . ¿Y qué sucede con una ecuación completa no reducida?

Se puede aplicar el mismo método de completar el cuadrado, pero si bien se puede justificar algebraicamente cada paso, resulta tedioso aplicarlos para resolver una ecuación en particular.

Si partimos del modelo de ecuación: $\mathbf{a\,x^2 + b\,x + c = 0}$ (con $a \neq 1$; b y $c \neq 0$) y aplicamos pasos similares, llegamos a una **FORMULA RESOLVENTE**

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

que podemos aplicar directamente a la ecuación .

EJERCICIOS

3) Hallar las raíces

$$4x^2 - 4x - 8 = 0 \qquad 2x^2 - 2x + 5 = 0$$
$$5x^2 + 10x - 15 = 0 \qquad 3x^2 + 4x + \frac{29}{3} = 0$$

e) La expresión $\boxed{b^2 - 4ac}$ se llama ***discriminante*** (Δ)

¿Cómo serán las raíces si

$\Delta > 0$

$\Delta < 0$

$\Delta = 0$?

Propiedades de las raíces

f) Retoma los resultados obtenidos en el ejercicio (2) y vuélcalos en la tabla :

RAICES	**a**	**b**	**c**	**d**	**e**
X_1					
X_2					

Realiza para cada columna :

- (X_1 + X_2) = ____________________________________

X_1 . X_2 = ____________________________________

¿Con qué coeficientes de la respectiva ecuación coinciden los resultados?

____

DEFINICION :

$$\boxed{\begin{aligned} X_1 + X_2 &= -\frac{b}{a} \\ X_1 \cdot X_2 &= \frac{c}{a} \end{aligned}}$$

Recuerda que en el ejercicio (2); **a = 1** .

EJERCICIOS

4) Verifica la definición anterior en el ejercicio (3)

5) "Inventa" ecuaciones que tengan por solución:

X_1	- 2	1	3 + i	6	1 - i
X_2	3	10	3 - i	- 1	1 + i

6) Si las raíces de una ecuación de coeficientes reales son números complejos ¿ qué tipo de complejos deben ser y por qué?

Problemas :

Muchas situaciones problemáticas llevan a plantear ecuaciones de segundo grado, de allí su importancia. A partir de las propiedades vistas podremos resolverlas.

Recuerda que la aplicación de fórmulas es la parte “mecánica” del asunto; lo fundamental es la **interpretación** del problema y de sus soluciones.

g) *Un número es tal que su anterior multiplicado por su doble es igual a 12. Hallarlo.*

Interpretación :

$$\left.\begin{array}{ll} \text{número :} & x \\ \text{anterior:} & x - 1 \\ \text{doble :} & 2x \end{array}\right\}$$

$(x - 1) \,.\, 2x = 12$

________________________ = 12

________________________ = 0

Mecanismo de resolución:

$$\frac{+2 \pm \sqrt{4+96}}{4} =$$

____

Verificación : ____

Soluciones : el número puede ser **3** o **- 2**

Nota : En este caso, las dos respuestas son válidas. Según las características del enunciado, podría no suceder así. Por ejemplo si el enunciado indicara: “*Un número **positivo** es tal ...*”
la respuesta correcta sería solamente **3** .

<u>EJERCICIOS</u>

7) Sabiendo que el área de un rectángulo es 96 cm^2 y su base es 4 cm menor que el triple de su altura; hallar el perímetro.

8) ¿ Cuánto tardará un móvil con $\mathbf{V_0}$ = 10 m / s y **a** = 2 m / s^2 en recorrer 17,25 m?

9) La hipotenusa del triángulo abc mide $\sqrt{10}$ cm y sus catetos quedan expresados por
b = x + 1 y c = x - 1 . Hallar el perímetro.

10) Sabiendo que el perímetro de un rectángulo es 26 cm y su área es 42 cm^2, hallar la base y la altura .

11) La suma de dos números es $-\frac{7}{4}$ y su producto $\frac{1}{2}$. Hallarlos.

12) ¿ Existen dos números reales cuya suma sea - 4 y su producto 5? ¿ por qué?

FUNCIÓN CUADRATICA

Planteamos ahora el problema de los polinomios de segundo grado desde el punto de vista gráfico.

Si **n** es raíz de una ecuación de segundo grado, entonces el par **(n ; 0)** pertenece a la función asociada (siempre y cuando **n** sea un valor real). Por lo tanto:

a) Si Δ (discriminante) es :

MAYOR que cero —— el gráfico ______________ al eje X

MENOR que cero —— el gráfico ______________ al eje X

IGUAL que cero —— el gráfico ______________ al eje X

El gráfico de una función de segundo grado se llama ***Parábola*** y es simétrico respecto de un **EJE**; el punto de máxima o mínima ordenada (punto extremo) se encuentra sobre el eje, y se denomina **VÉRTICE.**

Como los valores de las raíces de la parábola pertenecen a ella, entonces son simétricos respecto al eje; así que para hallar la absisa del eje basta considerar el valor “promedio” de las raíces:

$\mathbf{x_1}$ y $\mathbf{x_2}$ raíces

$$\text{absisa del eje} = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

Y por ser el vértice un punto **único**, en una simetría axial; ¡ Debe estar sobre el eje!
Así que:

$$\mathbf{f}_{\mathbf{(eje)}} = \text{vértice}$$

Apliquemos para graficar:

b) f (x) = $x^2 + 4x - 5$

1 - Raíces : $\frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \bullet 1 \bullet (-5)}}{2 \bullet 1} =$ ________________________________ 1 / -5

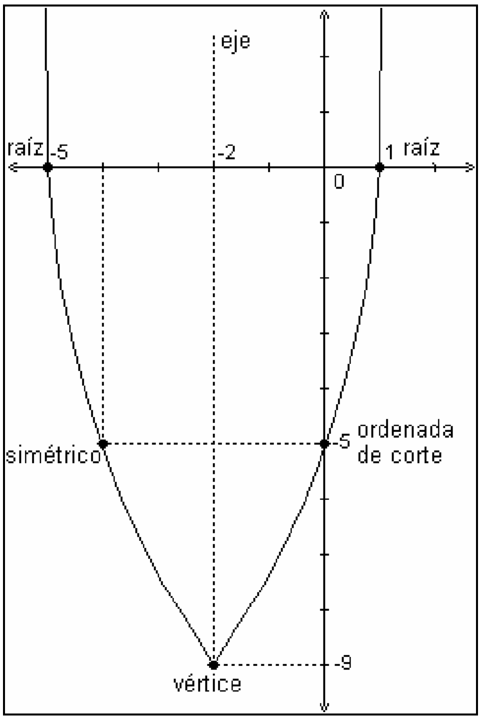
2 - Eje : $\frac{1 + (-5)}{2}$ = ________ = **- 2**

3 - Vértice : f (-2) = $(-2)^2 + 4 \bullet (-2) - 5$ = ____________________ = - 9

4 - Otro valor “fácil” es para **x = 0**

____________________ **= - 5**
“ordenada de corte”

hasta ahora podemos graficar :



Y si queremos más exactitud se pueden calcular otros valores mediante una tabla

x	f (x)

EJERCICIOS

Representar las parábolas:

1) $f(x) = x^2 - 10x + 24$

2) $g(x) = x^2 - 1$

3) $h(x) = x^2 + 2x + 5$

4) $j(x) = x^2 + 2x$

5) $k(x) = x^2$ 6) $l(x) = \frac{1}{2}x^2$ 7) $m(x) = 2x^2$

¿En qué afecta el coeficiente del término cuadrático?

____

Este determina la **CURVATURA** de la parábola

8) $n(x) = -x^2$

Comparada con k (x) ¿ qué diferencia se observa?

____

Este signo determina la **CONCAVIDAD** de la parábola