Resolución de ecuaciones de 2º grado y ecuaciones bicuadradas. 4ºESO.

1. ECUAC. 2º GRADO Y UNA INCÓGNITA

Una *ecuación* con una incógnita es de *segundo grado* si el exponente de la incógnita es dos.

Ecuaciones de segundo grado con una incógnita son:

$$3x^2 - 2x + 1 = 5; \quad 2x^2 - 3 = 2; \quad 4x^2 - 2x + 1 = 0; \quad \frac{x+1}{x-1} = 2x$$

Esta última ecuación parece, a simple vista, de primer grado, pero si se opera en ella, $x + 1 = 2x(x - 1)$ Û $x + 1 = 2x^2 - 2x$, se observa que es una ecuación de segundo grado.

Cualquier ecuación de segundo grado puede, mediante transformaciones, expresarse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, y b son los coeficientes de los términos x^2 y x respectivamente y c es el término independiente.

<u>1.1. Ecuación de segundo grado completa</u>

Una ecuación de segundo grado es *completa* cuando los tres coeficientes a, b, y c son distintos de cero.

La expresión de una ecuación de segundo grado completa es $ax^2 + bx + c = 0$.

<u>1.2. Ecuación de segundo grado incompleta</u>

Una ecuación de segundo grado es incompleta cuando los términos b ó c, o ambos, son cero.

(Si $a = 0$, la ecuación resultante sería $bx + c = 0$, que no es una ecuación de segundo grado.)

La expresión de una ecuación de segundo grado incompleta es:

$ax^2 = 0$; si $b = 0$ y $c = 0$.

$ax^2 + bx = 0$; si $c = 0$.

$ax^2 + c = 0$; si $b = 0$.

<u>Transformación de una ecuación de segundo grado a la forma $ax^2 + bx + c = 0$</u>

Para transformar una ecuación cualquiera de segundo grado en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, se siguen, si procede, los siguientes pasos:

1. Se quitan paréntesis, teniendo en cuenta el signo que les precede.

2. Se quitan los denominadores multiplicando la ecuación por el mínimo común múltiplo de los mismos.

3. Se pasan todos los términos de la ecuación al mismo lado del signo =.

4. Se reducen los términos semejantes.

5. Se ordenan los términos según el orden decreciente de los exponentes de x: $ax^2 + bx + c = 0$.

Una vez obtenida esta expresión, si la ecuación puede simplificarse, porque todos sus coeficientes sean múltiplos de algún número, debe hacerse, con el fin de facilitar las operaciones posteriores.

Si el término en x^2 fuese negativo, se multiplicaría toda la ecuación por -1, obteniéndose así otra ecuación equivalente con el término de mayor grado positivo.

Ejercicio: ecuaciones de segundo grado

----

1. Expresar la ecuación $3x^2 - 2x + 1 = 5$ en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, indicando los valores de los coeficientes a, b y c.

Resolución:

1. Se pasan todos los términos al mismo lado del signo =, y se reducen los términos semejantes:

$3x^2 - 2x + 1 - 5 = 0$ è $3x^2 - 2x - 4 = 0$

$a = 3$ es el coeficiente del término en x^2.

$b = -2$ es el coeficiente del término en x.

$c = -4$; es el término independiente.

La ecuación es completa. Ninguno de sus coeficientes es cero.

② Expresar en la forma $ax^2 + bx + c = 0$ la ecuación $\frac{15}{x} = 8 + x$

Resolución:

1. La x que está dividiendo en el primer miembro pasa a multiplicar al segundo:
$15 = (8 + x) \times x$

2. Se quitan paréntesis: $15 = 8x + x^2$.

3. Se pasan todos los términos al mismo miembro y se ordenan:
$15 - 8x - x^2 = 0$ Þ $-x^2 - 8x + 15 = 0$.

4. Si en lugar de pasar los términos al primer miembro, se pasan al segundo, la ecuación resultante es:
$0 = x^2 + 8x - 15$, ecuación equivalente a la anterior.
En la ecuación $-x^2 - 8x + 15 = 0$, $a = -1$; $b = -8$ y $c = 15$
En la ecuación $x^2 + 8x - 15 = 0$, $a = 1$; $b = 8$ y $c = -15$
Los coeficientes son iguales pero de signos contrarios.
Para pasar de una ecuación a otra basta con multiplicar por -1.

3 Expresar en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, la ecuación

$$\frac{3(x+1)}{2} - \frac{2(x-1)}{3} = \frac{(x+1)(x+2)}{5}$$

Resolución:

1. Se quitan paréntesis:

$$\frac{3x+3}{2} - \frac{2x-2}{3} = \frac{x^2+2x+x+2}{5}$$

2. Se multiplica toda la ecuación por m.c.m. (2, 3, 5) = 30

$15(3x + 3) - 10(2x - 2) = 6(x^2 + 2x + x + 2)$;
$45x + 45 - 20x + 20 = 6x^2 + 12x + 6x + 12)$;
$45x + 45 - 20x + 20 - 6x^2 - 12x - 6x - 12 = 0$.

3. Se reducen términos semejantes: $7x - 6x^2 + 53 = 0$

4. Se ordena la ecuación resultante: $-6x^2 + 7x + 53 = 0$.

Esta ecuación también puede expresarse así: $6x^2 - 7x - 53 = 0$.

---

2. RESOLUCIÓN DE ECUACIONES DE SEGUNDO GRADO.

Las ecuaciones de segundo grado incompletas son de tres tipos:

A. $ax^2 = 0$; si $b = 0$ y $c = 0$.
B. $ax^2 + bx = 0$; si $c = 0$.
C. $ax^2 + c = 0$; si $b = 0$.

A. $ax^2 = 0$.

Despejando x^2 se tiene: $x^2 = \frac{0}{a} = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

Por lo tanto, las ecuaciones de la forma $ax^2 = 0$ tienen como solución única $x = 0$.

B. $ax^2 + bx = 0$.

Sacando factor común x en el primer miembro, resulta: $x(ax + b) = 0$.

Para que un producto de dos factores x y $(ax + b)$, dé como resultado cero, uno de ellos debe ser cero:

$$x(ax+b) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ ax + b = 0 \Rightarrow ax = -b \Rightarrow x = \dfrac{-b}{a} \end{cases}$$

En consecuencia, las ecuaciones de la forma $ax^2 + bx = 0$ tienen dos soluciones:

$x = 0$ y $x = \dfrac{-b}{a}$.

C. $ax^2 + c = 0$.

Despejando x^2, se tiene: $x^2 = \dfrac{-c}{a} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$

Si el radicando, $\dfrac{-c}{a}$ es negativo, $ax^2 + c = 0$ no tiene solución, pues no existe la raíz cuadrada de un número negativo.

Si el radicando es positivo, la ecuación tiene dos soluciones: $x = +\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$ y $x = -\sqrt{\dfrac{-c}{a}}$.

Ejercicio: resolución de ecuaciones de segundo grado incompletas

---

① Resolver las ecuaciones a) $3x^2 = 0$; b) $\frac{5}{2}x^2 = 0$.

Resolución:

a) $3x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = \frac{0}{3} = 0 \Rightarrow x = 0$

b) $\frac{5}{2}x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x = 0$

2. Resolver las ecuaciones a) $2x^2 + 4x = 0$; b) $-3x^2 + 2x = 0$; c) $x^2 - x = 0$.

Resolución:

a) **$2x^2 + 4x = 0$**

1. Sacando factor común x, resulta:

$$x(2x+4) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ 2x + 4 = 0 \Rightarrow x = \frac{-4}{2} = -2 \end{cases}$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x = 0$ y $x = -2$.

b) **$-3x^2 + 2x = 0$**

1. Sacando factor común x, resulta:

$$x(-3x+2) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ -3x + 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{-2}{-3} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x = 0$ y $x = \frac{2}{3}$

c) **$x^2 - x = 0$**

1. Sacando factor común x, resulta:

$$x(x-1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \text{ó} \\ x - 1 = 0 \Rightarrow x = 1 \end{cases}$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x = 0$ y $x = 1$.

3. Resolver las ecuaciones a) $3x^2 - 27 = 0$; b) $3x^2 + 27 = 0$; c) $-25x^2 + 4 = 0$.

Resolución:

a) **$3x^2 - 27 = 0$**

$$3x^2 = 27 \Rightarrow x^2 = \frac{27}{3} \Rightarrow x^2 = 9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$$

La ecuación tiene dos soluciones, x = 3 y x = -3.

***b)* $3x^2 + 27 = 0$**

$$3x^2 = -27 \Rightarrow x^2 = \frac{-27}{3} \Rightarrow x^2 = -9 \Rightarrow x = \pm\sqrt{-9}$$

El radicando, -9, es un número negativo, luego no tiene raíz. La ecuación, por lo tanto, no tiene solución.

***c)* $-25x^2 + 4 = 0$**

$$-25x^2 = -4 \Rightarrow x^2 = \frac{-4}{-25} = \frac{4}{25} \Rightarrow x = \pm\sqrt{\frac{4}{25}} = \pm\frac{2}{5}$$

La ecuación tiene dos soluciones: $x = \frac{2}{5}$ y $x = \frac{-2}{5}$

----

3. RESOLUCION DE ECUACIONES DE 2º GRADO COMPLETAS.

Una ecuación de segundo grado completa puede expresarse en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números distintos de cero.

Para resolver una ecuación de segundo grado se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula se obtiene a través de las siguientes transformaciones de la ecuación de partida $ax^2 + bx + c = 0$.

1. Se resta c en los dos miembros de la ecuación:

$ax^2 + bx = -c$

2. Se multiplican los dos miembros de la ecuación por 4a (se puede hacer puesto que a ¹ 0):

$4a(ax^2 + bx) = 4a(-c)$ Þ $4a^2x^2 + 4abx = -4ac$

3. Se suma b^2 en los dos miembros de la ecuación:

$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = -4ac + b^2$

4. En el primer miembro figura el cuadrado del binomio $2ax + b$, ya que

$(2ax+b)^2 = 4a^2x^2 + 4axb + b^2$. Por lo que se puede escribir:

$(2ax + b)^2 = -4ac + b^2$

5. Extrayendo en los dos miembros la raíz cuadrada, resulta:

$$2ax + b = \pm\sqrt{-4ac + b^2}$$

6. Despejando x, se llega a la fórmula anunciada:

$$2ax = -b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esta fórmula se utiliza también para resolver las ecuaciones de segundo grado incompletas, sin más que poner un cero en el coeficiente correspondiente.

De esta fórmula se deduce que una ecuación de segundo grado tiene dos soluciones, llamadas x_1 y x_2, dependiendo del signo + ó - que se toma delante de la raíz:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

3.1. Discusión de las soluciones de una ecuación de segundo grado

A la expresión que aparece, en las fórmulas anteriores, bajo el signo de raíz, $b^2 - 4ac$, se le denomina discriminante, y se representa por la letra griega delta mayúscula, Δ.

$\Delta = b^2 - 4ac$.

Dependiendo del valor del discriminante, una ecuación de segundo grado puede tener dos, una o ninguna solución.

Se distinguen tres casos:

A. $\Delta > 0$. Si el discriminante es positivo, la ecuación de segundo grado tiene dos soluciones distintas:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}; \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

B. $\Delta = 0$. Si el discriminante es cero, las dos soluciones anteriores coinciden, teniendo la ecuación una única solución, y en este caso es una solución doble:

Por lo tanto, $x_1 = x_2$.

C. $\Delta < 0$. Si el discriminante es negativo, la ecuación de segundo grado no tiene solución real, ya que la raíz cuadrada de números negativos no existe.

$\Delta > 0$ Dos soluciones distintas

$\Delta = 0$ Solución única doble

$\Delta < 0$ No hay solución

Ejercicio: resolución de ecuaciones de segundo grado

---

1. Resolver la ecuación $x^2 - 5x + 6 = 0$.

Resolución:

1. $a = 1$; $b = -5$; $c = 6$.

- $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 6}}{2 \cdot 1} =$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{1}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

- $x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$; $\quad x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

La ecuación tiene dos soluciones: $x = 3$ y $x = 2$.

2. Resolver la ecuación $3x^2 + 3x - 18 = 0$.

Resolución:

1. Como todos los coeficientes son múltiplos de 3, dividiendo todos los términos entre este número, se obtiene una ecuación equivalente más sencilla:

$x^2 + x - 6 = 0$

2. $a = 1$; $b = 1$; $c = -6$

- $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{25}}{2} = \frac{-1 \pm 5}{2}$$

- Las dos soluciones son: $x_1 = \frac{-1+5}{2} = 2$; $\quad x_2 = \frac{-1-5}{2} = -3$

3. Resolver la ecuación $x^2 + x + 1 = 0$.

Resolución:

1. En esta ecuación $a = 1$; $b = 1$; $c = 1$.

2. Aplicando la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}$$

3. La ecuación no tiene solución, ya que el discriminante es negativo.

4. Resolver la ecuación $10x^2 + 5(4x + 2) = 0$.

Resolución:

1. Antes de aplicar la fórmula, hay que expresar esta ecuación en la forma

$ax^2 + bx + c = 0$.
$10x^2 + 20x + 10 = 0$. Esta ecuación puede simplificarse dividiendo entre 10:
$x^2 + 2x + 1 = 0$

2. $a = 1$, $b = 2$, $c = 1$

3. Se aplica la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4 \cdot 1 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{0}}{2} = \frac{-2}{2} = -1$$

Por ser el discriminante cero, la ecuación tiene una solución doble:

$x_1 = x_2 = -1$

⑤ Resolver la ecuación $\frac{3x^2}{4} - \frac{2(x-2)}{5} = 2x - 1$

Resolución:

1. Se eliminan paréntesis:

$$\frac{3x^2}{4} - \frac{2x-4}{5} = 2x - 1$$

2. Multiplicando la ecuación por el m.c.m. de los denominadores, 20:

$5 \times 3x^2 - 4(2x - 4) = 20(2x - 1)$; $15x^2 - 8x + 16 = 40x - 20$;

$15x^2 - 8x + 16 - 40x + 20 = 0$; $15x^2 - 48x + 36 = 0$

3. Dividiendo toda la ecuación entre 3, resulta: $5x^2 - 16x + 12 = 0$.

4. Aplicando ahora la fórmula:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{16 \pm \sqrt{256 - 240}}{10} = \frac{16 \pm 4}{10}$$

5. Las dos soluciones son:

$$x_1 = \frac{16+4}{10} = \frac{20}{10} = 2 \quad \text{y} \quad x_2 = \frac{16-4}{10} = \frac{12}{10} = \frac{6}{5}$$

<u>3.2. Suma y producto de las raíces de una ecuación de segundo grado</u>

Dada la ecuación de segundo grado $ax^2 + bx + c = 0$, y x_1 y x_2 sus soluciones, se cumple:

1. La suma de las dos soluciones o raíces de una ecuación de segundo grado, $x_1 + x_2$, es

$$x_1 + x_2 = \frac{-b}{a}$$

Demostración:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} + \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$
$$= \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} = \frac{-b-b}{2a} = \frac{-2b}{2a} = \frac{-b}{a}$$

2. El producto de las dos soluciones de una ecuación de segundo grado, $x_1 \times x_2$, es

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}$$

Demostración:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a} \cdot \frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a} =$$
$$= \frac{\left(-b+\sqrt{b^2-4ac}\right)\left(-b-\sqrt{b^2-4ac}\right)}{4a^2}$$

El numerador es una suma por una diferencia. Su resultado es la diferencia de cuadrados:

$$x_1 \cdot x_2 = \frac{(-b)^2-\left(\sqrt{b^2-4ac}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2-\left(b^2-4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Ejercicio: suma y prod. de las soluciones de una ecuación de segundo grado

---

1. Determinar, sin resolver las ecuaciones, el valor de la suma y del producto de sus soluciones:

$$a) \quad 2x^2+7x-15=0; \quad b) \ \frac{20}{x}=9-x; \quad c)\ 3x^2+6x+3=0.$$

Resolución:

a) $2x^2 + 7x - 15 = 0$; $a = 2$; $b = 7$; $c = -15$

- $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-7}{2} = -3{,}5$
- $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{-15}{2} = -7{,}5$

$$b)\ \frac{20}{x} = 9 - x$$

1. Se pasa esta ecuación a la forma $ax^2 + bx + c = 0$:

$20 = x(9 - x)$ Þ $20 = 9x - x^2$ Þ $x^2 - 9x + 20 = 0$

2. $a = 1$; $b = -9$; $c = 20$

c) $3x^2 + 6x + 3 = 0$; en esta ecuación $a = 3$; $b = 6$; $c = 3$.

• $x_1 + x_2 = \frac{-b}{a} = \frac{-6}{3} = -2$; $x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a} = \frac{3}{3} = 1$

3.3. Determinación de una ecuación de segundo grado a partir de la suma y producto de sus soluciones

Conociendo la suma y el producto de las soluciones de una ecuación de segundo grado, se puede determinar la ecuación correspondiente.

Sea S la suma de las dos raíces o soluciones de la ecuación:

$$S = \frac{-b}{a} \Rightarrow a \cdot S = -b \Rightarrow -a \cdot S = b$$

Sea P el producto de las dos raíces de la ecuación: $P = \frac{c}{a} \Rightarrow a \cdot P = c$

La ecuación de segundo grado se escribe como $ax^2 + bx + c = 0$. Sustituyendo b y c por su valor: $ax^2 - aSx + aP = 0$

Dividiendo toda la ecuación entre a: $x^2 - Sx + P = 0$

Conociendo la suma S, y el producto, P, de las dos soluciones de una ecuación de segundo grado, la ecuación se puede escribir como:

$$x^2 - Sx + P = 0$$

Ejercicio: ecuaciones de segundo grado

---

1. Determinar la ecuación de segundo grado cuya suma de soluciones vale 5 y cuyo producto vale 6.

Resolución:

1. $S = 5$; $P = 6$

La ecuación es $x^2 - Sx + P = 0$. Sustituyendo S y P por sus valores, se obtiene:

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

2. Para comprobar que la suma y el producto de las soluciones de la ecuación son 5 y 6 respectivamente, basta con resolver la ecuación.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 24}}{2} = \frac{5 \pm 1}{2}$$

Las dos soluciones son: $x_1 = \frac{5+1}{2} = \frac{6}{2} = 3$; $x_2 = \frac{5-1}{2} = \frac{4}{2} = 2$

$S = x_1 + x_2 = 3 + 2 = 5$
$P = x_1 \times x_2 = 3 \times 2 = 6$
Luego, efectivamente la ecuación es $x^2 - 5x + 6 = 0$.

2. Determinar una ecuación de segundo grado que tenga por soluciones $x_1 = -2$,
$x_2 = 3$.

Resolución:

1. $S = x_1 + x_2 = -2 + 3 = 1$

$P = x_1 \times x_2 = -2 \times 3 = -6$

2. Sustituyendo los valores de S y P en la ecuación $x^2 - Sx + P = 0$ se obtiene la ecuación $x^2 - x - 6 = 0$.

3. Para comprobarlo basta con resolver la ecuación y observar que sus raíces son -2 y 3.

3. Determinar una ecuación de segundo grado sabiendo que la suma de sus raíces es $\frac{4}{3}$ y el producto $\frac{5}{2}$.

Resolución:

- $S = \frac{4}{3}$; $P = \frac{5}{2}$

La ecuación es $x^2 - \frac{4}{3}x + \frac{5}{2} = 0$.

1. Multiplicando toda la ecuación por el m.c.m de los denominadores, se obtiene la ecuación equivalente $6x^2 - 8x + 15 = 0$.

4. Obtener dos números sabiendo que su suma es 5 y su producto es -14.

Resolución:

1. La búsqueda de los dos números puede hacerse considerándolos como las dos soluciones de una ecuación de segundo grado.

$S = 5$; $P = -14$.

2. Los dos números son las soluciones de la ecuación $x^2 - 5x - 14 = 0$.

$$x = \frac{5 \pm \sqrt{25 - 4 \cdot 1(-14)}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 56}}{2} = \frac{5 \pm \sqrt{81}}{2} =$$

$$= \frac{5 \pm 9}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{5+9}{2} = 7 \\ x_2 = \frac{5-9}{2} = -2 \end{cases}$$

Los dos números buscados son 7 y -2.

3. Comprobación: $7 + (-2) = 5 = S$
$7 \times (-2) = -14 = P$

Ejercicio: problemas que se resuelven mediante ecuaciones de segundo grado

---

1. Hallar dos números pares consecutivos cuyo producto sea 168.

Resolución:

1. Cualquier número par puede expresarse en la forma $2x$.

2. Sea pues $2x$ un número par. El par consecutivo de $2x$ es $2x + 2$.

3. El producto de los dos números es 168: $2x(2x + 2) = 168$. Se plantea así una ecuación de segundo grado que hay que resolver.

4. $2x(2x + 2) = 168$ Þ $4x^2 + 4x - 168 = 0$.

5. Dividiendo toda la ecuación entre 4, resulta $x^2 + x - 42 = 0$.

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot (-42)}}{2} = \frac{-1 \pm 13}{2} = \begin{cases} x_1 - 6 \\ x_2 - 7 \end{cases}$$

6. Si $x = 6$, $2x + 2 = 12 + 2 = 14$

Una solución es 12 y 14.

7. Si $x = -7$, $2x + 2 = -14 + 2 = -12$

Dos números pares consecutivos cuyo producto es 168 son -14 y -12.

El problema tiene dos soluciones: 12 y 14; -12 y -14.

2. Calcular dos números cuya suma sea 39 y cuyo producto sea 380.

Resolución:

1. Si x es uno de los números, el otro será $39 - x$, puesto que entre las dos han de sumar 39.

2. El producto de los dos números es 380:

$$x(39 - x) = 380$$

3. Las soluciones de esta ecuación son:

$x(39 - x) = 380$ Þ $39x - x^2 - 380 = 0$ Þ $x^2 - 39x + 380 = 0$

$$x = \frac{39 \pm \sqrt{1\ 521 - 1\ 520}}{2} = \frac{39 \pm 1}{2} = \begin{cases} x_1 = \frac{40}{2} = 20 \\ x_2 = \frac{38}{2} = 19 \end{cases}$$

Si un número es 20, el otro será 39 - 20 = 19.

Si un número es 19, el otro será 39 - 19 = 20.

3. Se han comprado gomas de borrar por un total de 60 pta. Si se hubieran comprado tres gomas más, el comerciante habría hecho un descuento de 1 peseta en cada una, y el precio total habría sido el mismo. ¿Cuántas gomas se compraron?

Resolución:

1. Sea x el número de gomas que se han comprado por 60 pta. El precio de cada goma se obtendrá dividiendo el precio total entre el número de gomas.

Precio de cada goma $= \dfrac{60}{x}$.

- Si se compran tres gomas más, su precio será $\dfrac{60}{3+x}$; pero como su precio

sería de 1 pta. menos cada una, entonces se obtendrá:

$$\frac{60}{x} - 1 = \frac{60}{x+3}$$

2. Resolviendo esta ecuación:

$$\frac{60}{x} - 1 = \frac{60}{x+3} \Rightarrow \frac{60-x}{x} = \frac{60}{x+3} \Rightarrow (60-x)(x+3) = 60x \Rightarrow$$

è $60x + 180 - x^2 - 3x = 60x$ è $x^2 + 3x - 180 = 0$

$$x = \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4(-180)}}{2} = \frac{-3 \pm 27}{2} = \begin{cases} x_1 = \dfrac{24}{2} = 12 \\ x_2 = \dfrac{-30}{2} = -15 \end{cases}$$

El número de gomas que se compraron fue 12, ya que una solución negativa para un número de objetos no tiene sentido. Cada goma costó $\dfrac{60}{12}$ PTA .

Si se hubieran comprado 3 gomas más, es decir, 15 gomas, el precio hubiese sido de 4 PTA cada una.

4. Dos obreros tardan 12 horas en hacer un trabajo. ¿Cuánto tardarían en hacerlo separadamente, si uno tarda 5 horas más que el otro?

Resolución:

1. Sea x el número de horas que emplea el primer obrero en realizar el trabajo.

En una hora hará $\dfrac{1}{x}$ del total del trabajo.

- El segundo obrero empleará $(5+x)$ horas. En una hora hará $\dfrac{1}{5+x}$ del total

del trabajo.

- Entre los dos tardan 12 horas, luego en una hora harán $\dfrac{1}{12}$ del total del trabajo.

- Por lo tanto, $\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{5+x} = \dfrac{1}{12}$

2. Se resuelve la ecuación:

m.c.m. $(x,\ 5 + x,\ 12) = 12 \times x \times (5 + x)$
$12 \times (5 + x) + 12x = x(5 + x)$
$60 + 12x + 12x = 5x + x^2$
$x^2 - 19x - 60 = 0$

$$x = \frac{19 \pm \sqrt{361+240}}{2} = \frac{19 \pm \sqrt{601}}{2} = \frac{19 \pm 24,5}{2} = \begin{cases} x_1 = 21,75 \\ x_2 = -2,75 \end{cases}$$

El primer obrero tarda en realizar el trabajo, él solo, 21,75 horas, es decir, 21 horas y 45 minutos.

El segundo obrero tarda 5 horas más, es decir, 26 horas y 45 minutos.

5. Una ecuación de segundo grado con un incógnita tiene una solución igual a 3 y el término independiente vale 15. Calcular la ecuación.

Resolución:

1. Por ser 3 solución de la ecuación, ésta se puede descomponer en la forma $(x - 3)(x - x_2) = 0$, donde x_2 es la segunda solución de la ecuación.

2. Desarrollando el producto: $x^2 - x \times x_2 - 3x + 3x_2 = 0$.

3. El término independiente es $3x_2$, y vale 15.

$$3x_2 = 15 \Rightarrow x_2 = \frac{15}{3} = 5$$

4. La ecuación es $(x - 3)(x - 5) = 0$ Þ $x^2 - 8x + 15 = 0$.

6. Determinar el valor de m para que la ecuación $2x^2 - 4x + m = 0$ tenga una raíz doble.

Resolución:

1. Una ecuación de segundo grado tiene una raíz doble si su discriminante es cero.

$\Delta = b^2 - 4ac = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = 16 - 4 \cdot 2 \cdot m = 0, \Rightarrow 16 - 8m = 0 \Rightarrow m = \frac{16}{8} = 2.$$

2. La ecuación $2x^2 - 4x + m = 0$ tiene una raíz doble si $m = 2$.

7. Si se aumenta en 4 cm el lado de un cuadrado, su área aumenta en 104 cm². Calcular el área y perímetro del cuadrado inicial.

Resolución:

1. Sea l el lado del cuadrado. El área será $S = l^2$.

2. Si se aumenta en 4 cm el lado del cuadrado, $l + 4$, su área será $(l + 4)^2$.

3. Al hacer la transformación, el área aumenta en 104 cm^2, es decir: $l^2 + 104 = (l + 4)^2$

4. Se resuelve la ecuación $l^2 + 104 = l^2 + 16 + 8l$.

5. Simplificando l^2 en los dos miembros, resulta una ecuación de primer grado:

6. El área del cuadrado inicial es $S = l^2 = 11^2 = 121$ cm^2

7. El perímetro del cuadrado inicial es $P = 4 \times l = 4 \times 11$ cm $= 44$ cm

4. ECUACIONES BICUADRADAS

Una ***ecuación bicuadrada*** es una ecuación que se puede expresar en la forma

$$ax^4 + bx^2 + c = 0,$$

donde a, b y c son tres números reales.

Para resolver una ecuación bicuadrada se hace el cambio de variable $x^2 = y$, por lo tanto, $x^4 = (x^2)^2 = y^2$.

La ecuación expresada en función de y es: $ay^2 + by + c = 0$. Una vez resuelta esta ecuación se sustituyen sus soluciones en $x^2 = y$, obteniéndose así las soluciones para x.

4.1.Pasos a seguir para resolver una ecuación bicuadrada

1. Hacer el cambio $x^2 = y$, obteniendo la ecuación $ay^2 + by + c = 0$.

2. Resolver la ecuación $ay^2 + by + c = 0$, obteniéndose las soluciones y_1, y_2.

3. Deshacer el cambio, siendo $x = \pm\sqrt{y}$.

Se tienen así las soluciones $x_1 = +\sqrt{y_1}$; $x_2 = -\sqrt{y_1}$

$$x_3 = +\sqrt{y_2};\quad x_4 = -\sqrt{y_2}$$

Si la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ tiene dos soluciones positivas, la ecuación inicial $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tiene cuatro soluciones.

Si la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ tiene una solución positiva, la ecuación inicial $ax^4 + bx^2 + c = 0$ tiene dos soluciones.

Si la ecuación $ay^2 + by + c = 0$ no tiene soluciones positivas, la ecuación inicial $ax^4 + bx^2 + c = 0$ no tiene solución.

Ejercicio: ecuaciones bicuadradas

----

1. Resolver la ecuación $x^4 - 29x^2 + 100 = 0$.

Resolución:

1. Haciendo el cambio $x^2 = y$, se tiene la ecuación $y^2 - 29y + 100 = 0$.

2. Resolviendo esta ecuación se tienen las soluciones:

$$y = \frac{29 \pm \sqrt{29^2 - 4\cdot 1\cdot 100}}{2} = \frac{29 \pm \sqrt{441}}{2} = \frac{29 \pm 21}{2} \begin{cases} x_1 = 25 \\ x_2 = 4 \end{cases}$$

3. Las soluciones de la ecuación $x^4 - 29x + 100 = 0$ son:

$x_1 = +\sqrt{y_1} = +\sqrt{25} = +5$; $x_2 = -\sqrt{y_1} = -\sqrt{25} = -5$;

$x_3 = +\sqrt{y_2} = +\sqrt{4} = +2$; $x_4 = -\sqrt{y_2} = -\sqrt{4} = -2$

Las soluciones son 5, -5, 2, y -2.

2. Resolver la ecuación $x^4 - 4x^2 - 12 = 0$.

Resolución:

1. Haciendo el cambio $x^2 = y$, se tiene la ecuación $y^2 - 4y - 12 = 0$.

2. Las soluciones de esta ecuación son:

$$y = \frac{-(-4) \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1(-12)}}{2} = \frac{4 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{4 \pm 8}{2} = \begin{cases} x_1 = 6 \\ x_2 = -2 \end{cases}$$

Las soluciones de la ecuación de partida son:

$x_1 = +\sqrt{y_1} = +\sqrt{6}$; $x_2 = -\sqrt{y_1} = -\sqrt{6}$

$x_3 = +\sqrt{y_2} = +\sqrt{-2}$. No tiene solución.

$x_4 = -\sqrt{y2} = -\sqrt{-2}$. No tiene solución.

Las soluciones de la ecuación son $+\sqrt{6}$ y $-\sqrt{6}$.