

### 3 Potencias y raíces de números reales

1. El 3 de marzo de 1972 se lanzó el *Pioneer 10* desde Cabo Kennedy, diseñado para explorar el espacio más allá del sistema solar. La nave tardará unos 80 000 años en llegar a la estrella más cercana, Alfa Centauro, situada a 4,3 años luz de la Tierra, y seguirá el viaje hasta un punto cerca del límite de las constelaciones de Tauro y Orión.

¿Cuántos kilómetros tiene que recorrer para llegar a Alfa Centauro? (1 año luz =  $9,46 \cdot 10^{12}$  km)

2. Asocia cada enunciado de la lista A con un resultado de la lista B, de modo que sea razonable. Expresa todas las medidas en metros y en notación científica.

Lista A	Lista B
Diámetro del virus de la hepatitis B	150 millones de km
Distancia entre dos galaxias	45 nanómetros
Distancia entre dos puntos del planeta Tierra	21 cm
Altura de un árbol	0,5 mm
Ancho de un folio DIN A-4	30 millones de años luz
Distancia aproximada de la Tierra al Sol	3 metros
Tamaño de un ácaro	2 500 km

3. La memoria RAM de cierto ordenador personal tiene 256 Mb. Obtén el número de bits de la memoria, expresándolo como una potencia de 2.

Datos: 1 Mb = 1 024 kb, 1 kb = 1 024 bytes.

4. Calcula:

a)  $2^{-4} \cdot 2^4$       b)  $2^{16} + 2^{16}$       c)  $2^{-1} + 2^{-2}$       d)  $(2^{-1} \cdot 2^{-2})^{-1}$

5. Completa la siguiente tabla:

$a$	$b$	$a + b$	$a \cdot b$
$3 \cdot 7^3$	$4 \cdot 7^3$		
$2ab^2$	$3ab^2$		

6. Calcula:

a)  $\frac{1}{2 \cdot 3^{-3}} + 2^{-1}$       b)  $\frac{3 \cdot 5^{-1}}{2^{-2} \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 3^{-2}}$

7. Indica cuál de las siguientes expresiones es mayor:

a)  $\sqrt{8} + 5\sqrt{2}$       b)  $\sqrt{18} + \sqrt{32}$       c)  $\sqrt{50} + 4\sqrt{2} - \sqrt{8}$

8. Se quiere construir un triángulo equilátero de altura  $5\sqrt{3}$  cm utilizando alambre. ¿Cuánto es necesario para construirlo?

9. Calcula y simplifica:

a)  $(\sqrt[3]{2^6})^2$       b)  $\frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{4} - (2 + \sqrt{3})$

# SOLUCIONES

1. Tiene que recorrer 4 años luz.

$$4,3 \cdot 9,46 \cdot 10^{12} = 4,0678 \cdot 10^{13} \text{ km}$$

2.

Virus de la hepatitis B	45 nanómetros	$4,5 \cdot 10^{-8} \text{ m}$
Distancia entre galaxias	30 millones de años luz	$2,833 \cdot 10^{23} \text{ m}$
Puntos del planeta Tierra	2 500 km	$2,5 \cdot 10^3 \text{ m}$
Altura de un árbol	3 metros	3 m
Ancho DIN A-4	21 cm	$0,21 \cdot 10^{-2} \text{ m}$
Distancia de la Tierra al Sol	150 millones de kilómetros	$1,5 \cdot 10^{11} \text{ m}$
Tamaño de un ácaro	0,5 mm	$0,5 \cdot 10^{-3} \text{ m}$

3.  $256 \text{ Mb} = 256 \cdot 1\,024 \cdot 1\,024 \text{ bytes}$

$$256 \cdot 1\,024 \cdot 1\,024 = 2^8 \cdot 2^{10} \cdot 2^{10} = 2^{28}$$

Luego 256 Mb son  $2^{28}$  bytes.

4. a)  $2^{-4} \cdot 2^4 = 2^0 = 1$

$$\text{b) } 2^{16} + 2^{16} = 2^{16} (1 + 1) = 2^{16} \cdot 2 = 2^{17}$$

$$\text{c) } 2^{-1} + 2^{-2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$$

$$\text{d) } (2^{-1} \cdot 2^{-2})^{-1} = (2^{-1+(-2)})^{-1} = (2^{-3})^{-1} = 2^3 = 8$$

5.

a	b	a + b	a · b
$3 \cdot 7^3$	$4 \cdot 7^3$	$3 \cdot 7^3 + 4 \cdot 7^3 =$ $= 7^3(3 + 4) =$ $= 7^3 \cdot 7 = 7^4$	$3 \cdot 7^3 \cdot 4 \cdot 7^3 =$ $= 12 \cdot 7^3 \cdot 7^3 =$ $= 12 \cdot 7^6$
$2ab^2$	$3ab^2$	$2ab^2 + 3ab^2 =$ $= ab^2(2 + 3) =$ $= 5ab^2$	$2ab^2 \cdot 3ab^2 =$ $= 6a^2b^4$

$$\begin{aligned} \text{6. a) } \frac{1}{2 \cdot 3^{-3}} + 2^{-1} &= \frac{3^3}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3^3 + 1}{2} = \\ &= \frac{27 + 1}{2} = \frac{28}{2} = 14 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{3 \cdot 5^{-1}}{2^{-2} \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 3^{-2}} &= \frac{3 \cdot 2^2}{5 \cdot 7} + \frac{3^2}{7} = \\ &= \frac{3 \cdot 2^2}{5 \cdot 7} + \frac{3^2 \cdot 5}{5 \cdot 7} = \frac{12 + 45}{35} = \frac{57}{35} \end{aligned}$$

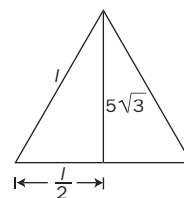
$$\begin{aligned} \text{7. a) } \sqrt{8} + 5\sqrt{2} &= \sqrt{2^3} + 5\sqrt{2} = 2\sqrt{2} + 5\sqrt{2} = \\ &= 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \sqrt{18} + \sqrt{32} &= \sqrt{3^2 \cdot 2} + \sqrt{2^5} = 3\sqrt{2} + 2^2\sqrt{2} = \\ &= 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{c) } \sqrt{50} + 4\sqrt{2} - \sqrt{8} &= \sqrt{5^2 \cdot 2} + 4\sqrt{2} - \sqrt{2^3} = \\ &= 5\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 2\sqrt{2} = 7\sqrt{2} \end{aligned}$$

Luego las tres expresiones son iguales.

8.



$$(5\sqrt{3})^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = l^2 \Rightarrow 25 \cdot 3 = l^2 - \frac{l^2}{4} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 75 = \frac{3}{4}l^2 \Rightarrow l^2 = \frac{300}{3} = 100 \Rightarrow l = 10$$

Se necesitan 30 cm de alambre.

$$\text{9. a) } (\sqrt[3]{2^6})^2 = \sqrt[3]{2^{12}} = \sqrt[6]{2^{12}} = 2^2 = 4$$

$$\begin{aligned} \text{b) } \frac{(\sqrt{2} + \sqrt{6})^2}{4} - (2 + \sqrt{3}) &= \\ &= \frac{(\sqrt{2})^2 + 2\sqrt{2} \cdot \sqrt{6} + (\sqrt{6})^2}{4} - (2 + \sqrt{3}) = \\ &= \frac{2 + 2\sqrt{12} + 6}{4} - (2 + \sqrt{3}) = \\ &= \frac{8 + 2\sqrt{2^2 \cdot 3}}{4} - (2 + \sqrt{3}) = \\ &= \frac{8 + 4\sqrt{3}}{4} - (2 + \sqrt{3}) = \\ &= (2 + \sqrt{3}) - (2 + \sqrt{3}) = 0 \end{aligned}$$

### 3 Potencias y raíces de números reales

1. Escribe en forma de potencias de 10:

- a)  $1\,000^3$       b) 0,01      c)  $\frac{1}{0,001}$       d) 1      e)  $0,001^3$

2. Expresa como una potencia de 2:

- a) 64      b)  $\frac{1}{8}$       c)  $4^2$       d)  $2^{-1} \cdot 2^3$       e)  $(4^3)^2$

3. Completa las siguientes igualdades:

- a)  $2^2 \cdot 2^{[?]} = 2^5$       c)  $(2^2)^{[?]} = 2^6$       e)  $3^{[?]} = \frac{1}{27}$   
 b)  $[?]^3 = -27$       d)  $(3^2)^{-4} = \frac{1}{[?]}$       f)  $a^{[?]} = \frac{1}{a^6}$

4. El número de moléculas que hay en un gramo de hidrógeno es 301 000 000 000 000 000 000. ¿Se puede manejar de forma más cómoda? Exprésalo en notación científica.

5. Realiza las siguientes operaciones en notación científica:

- a)  $(4 \cdot 10^{-3}) \cdot (7 \cdot 10^{12})$       b)  $(3,25 \cdot 10^6) : (2,3 \cdot 10^{-2})$       c)  $(234,23 \cdot 10^7) \cdot (12,034 \cdot 10^{-3})$

6. La galaxia Andrómeda está a 2 millones de años luz de nosotros. Esta distancia es 10 veces mayor que la de las nubes de Magallanes. ¿Cuánto distan de nosotros estas últimas? Expresa la distancia en años luz y en notación científica.

7. Calcula las siguientes raíces expresando el resultado en forma de potencia:

- a)  $\sqrt{7^2}$       b)  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}}$       c)  $\sqrt[5]{32}$       d)  $\sqrt{\frac{4}{9}}$

8. Simplifica los siguientes radicales:

- a)  $\sqrt[3]{625}$       b)  $\sqrt[4]{9^3}$       c)  $\sqrt{32\,768}$       d)  $\sqrt[5]{3^6 \cdot 2^{10}}$

9. a) Comprueba que  $\sqrt{300}$  es un cierto número de veces  $\sqrt{3}$ .

b) Utilizando el resultado anterior, calcula:  $\sqrt{300} + \sqrt{3}$

c) ¿Podemos hacer lo mismo con  $\sqrt{500} + \sqrt{3}$ , o hay que dejarlo indicado? ¿Por qué?

10. a) Reduce a común índice:  $\sqrt{5}$      $\sqrt[3]{5}$      $\sqrt[4]{5}$

b) Utiliza el resultado anterior para calcular  $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5}$

c) Expresa el producto obtenido como una potencia de 5.

d) Realiza ahora el producto, considerando los radicales como potencias de exponente fraccionario. Comprueba la coincidencia de resultados.

11. Ordena los siguientes radicales de menor a mayor:

$$\sqrt[3]{2^2} \qquad \sqrt[5]{8} \qquad \sqrt[4]{2^3}$$

12. Expresa como una potencia única las siguientes expresiones:

- a)  $\sqrt{7} \cdot 7^{\frac{5}{2}}$       b)  $(2\sqrt{2^3})^2$

# SOLUCIONES

1. a)  $1\,000^3 = (10^3)^3 = 10^9$   
 b)  $0,01 = 10^{-2}$   
 c)  $\frac{1}{0,001} = \frac{1}{10^{-3}} = 10^3$   
 d)  $1 = 10^0$   
 e)  $0,001^3 = (10^{-3})^3 = 10^{-9}$

2. a)  $64 = 2^6$   
 b)  $\frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = 2^{-3}$   
 c)  $4^2 = (2^2)^2 = 2^4$   
 d)  $2^{-1} \cdot 2^3 = 2^2$   
 e)  $(4^3)^2 = (4)^6 = (2^2)^6 = 2^{12}$

3. a)  $2^2 \cdot 2^3 = 2^5$       d)  $(3^2)^{-4} = \frac{1}{3^8}$   
 b)  $[-3]^3 = -27$       e)  $3^{-3} = \frac{1}{27}$   
 c)  $(2^2)^3 = 2^6$       f)  $a^{-6} = \frac{1}{a^6}$

4. Sí.  $3,01 \cdot 10^{23}$  moléculas.

5. a)  $(4 \cdot 10^{-3}) \cdot (7 \cdot 10^{12}) = (7 \cdot 4) (10^{-3} \cdot 10^{12}) = 28 \cdot 10^9 = 2,8 \cdot 10^{10}$   
 b)  $(3 \cdot 10^6) : (2,4 \cdot 10^{-2}) = (3 : 2,4) \cdot (10^6 : 10^{-2}) = 1,25 \cdot 10^8$   
 c)  $(234,2 \cdot 10^7) \cdot (12 \cdot 10^{-3}) = (234,2 \cdot 12) \cdot (10^7 \cdot 10^{-3}) = (2\,810,4 \cdot 10^4) = 2,8104 \cdot 10^7$

6. Distancia Andrómeda = 2 millones de años luz =  $2 \cdot 10^6$  años luz.

Distancia nubes Magallanes =  $\frac{2 \cdot 10^6}{10}$  años luz =  $2 \cdot 10^5$  años luz

7. a)  $\sqrt{7^2} = 7$       c)  $\sqrt[5]{32} = \sqrt[5]{2^5} = 2$   
 b)  $\sqrt[3]{\frac{1}{8}} = \sqrt[3]{\frac{1}{2^3}} = \frac{1}{2}$       d)  $\sqrt{\frac{4}{9}} = \sqrt{\frac{2^2}{3^2}} = \frac{2}{3}$

8. a)  $\sqrt[3]{625} = \sqrt[3]{5^4} = \sqrt[3]{5^3 \cdot 5} = 5 \sqrt[3]{5}$   
 b)  $\sqrt[4]{9^3} = \sqrt[4]{(3^2)^3} = \sqrt[4]{3^6} = \sqrt[4]{3^4 \cdot 3^2} = 3 \sqrt[4]{3^2}$   
 c)  $\sqrt{32\,768} = \sqrt{2^{15}} = \sqrt{2^{14} \cdot 2} = \sqrt{(2^7)^2 \cdot 2} = 2^7 \sqrt{2}$   
 d)  $\sqrt[5]{3^6 \cdot 2^{10}} = \sqrt[5]{3^5 \cdot 3 \cdot (2^2)^5} = 3 \cdot 2^2 \sqrt[5]{3}$

9. a)  $\sqrt{300} = \sqrt{3 \cdot 10^2} = 10 \cdot \sqrt{3}$   
 b)  $\sqrt{300} + \sqrt{3} = 10\sqrt{3} + \sqrt{3} = 11\sqrt{3}$   
 c)  $\sqrt{500} + \sqrt{3} = \sqrt{5 \cdot 10^2} + \sqrt{3} = 10\sqrt{5} + \sqrt{3}$

Hay que dejarlo indicado, los radicales son distintos y no se puede sumar.

10. a) m.c.m. (2, 3, 4) = 12  
 $\sqrt{5} = \sqrt[12]{5^6}$ ;  $\sqrt[3]{5} = \sqrt[12]{5^4}$ ;  $\sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^3}$   
 b)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5} = \sqrt[12]{5^6} \cdot \sqrt[12]{5^4} \cdot \sqrt[12]{5^3} = \sqrt[12]{5^6 \cdot 5^4 \cdot 5^3} = \sqrt[12]{5^{13}}$   
 c)  $\sqrt[12]{5^{14}} = \sqrt[12]{5^{12} \cdot 5^2} = 5 \sqrt[12]{5^2}$   
 d)  $\sqrt{5} \cdot \sqrt[3]{5} \cdot \sqrt[4]{5} = 5^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{3}} \cdot 5^{\frac{1}{4}}$

11.  $\sqrt[3]{2^2} = 2^{\frac{2}{3}}$   
 $\sqrt[5]{8} = \sqrt[5]{2^3} = 2^{\frac{3}{5}} = 2^{\frac{2}{5}}$   
 $\sqrt[4]{2^3} = 2^{\frac{3}{4}}$   
 Como  $\frac{3}{5} < \frac{2}{3} < \frac{3}{4}$   
 Ordenados son:  $\sqrt[5]{8}$ ,  $\sqrt[3]{2^2}$ ,  $\sqrt[4]{2^3}$

12. a)  $\sqrt{7} \cdot 7^{\frac{5}{2}} = 7^{\frac{1}{2}} \cdot 7^{\frac{5}{2}} = 7^{\frac{1}{2} + \frac{5}{2}} = 7^{\frac{6}{2}} = 7^3$   
 b)  $(2 \sqrt{2^3})^2 = 2^2 \sqrt{2^6} = 2^2 \cdot 2^3 = 2^5$