13 Áreas y volúmenes

1. Halla la longitud del arco y el área del sector circular en los siguientes casos:

a) Radio 9 cm y ángulo 50°.

b) Diámetro 24 cm y ángulo $\frac{4}{5}$ de ángulo recto.

2. Calcula el área de las siguientes figuras:

a) Corona circular formada por las circunferencias concéntricas de radios 9 y 7 cm respectivamente.

b) Trapecio circular formado por las circunferencias concéntricas de radios 12 y 9 cm, respectivamente, y ángulo 27°.

3. Halla el área lateral, el área total y el volumen de los siguientes cuerpos:

a) Prisma recto cuya base es un rectángulo de dimensiones 3 y 4 cm, y altura 10 cm.

b) Pirámide recta cuya base es un hexágono regular de lado 2 cm y altura 7 cm.

c) Cilindro recto cuya base tiene un radio de 5 cm y altura 25 cm.

4. Una tarta circular de 30 cm de diámetro y 6 cm de altura se divide en 12 partes iguales. Calcula el volumen de cada trozo de tarta.

5. Calcula cuántos centímetros cúbicos de tierra vegetal hacen falta para llenar una maceta que tiene forma de tronco de cono; las bases tienen radios de 6 y 10 cm y la altura de la maceta es 10 cm.

6. Halla el área de la superficie y el volumen de las esferas de las que se conocen:

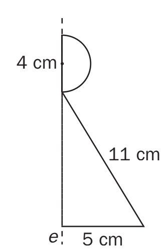
a) Radio 4 cm.

b) Diámetro 14 cm.

c) Engendrada al girar una circunferencia, cuya longitud es 17π cm, sobre uno de sus diámetros.

7. Un globo esférico, que tiene de radio 5 cm, se infla de forma que su nuevo radio sea igual al triple del radio original. ¿Cuántos centímetros cúbicos de aire se han introducido en el globo?

8. Calcula el área total y el volumen del cuerpo que se origina al hacer girar sobre el eje *e* la siguiente figura:



SOLUCIONES

1. a) $L = \dfrac{2\pi\ 9 \cdot 50^\circ}{360^\circ} = 7{,}85$ cm

$A = \dfrac{\pi\ 9^2 \cdot 50^\circ}{360^\circ} = 35{,}34\ \text{cm}^2$

b) El radio es 12 cm y el ángulo es $\dfrac{4}{5}$ de un recto, es decir, $\dfrac{4}{5} \cdot 90^\circ = \dfrac{360^\circ}{5} = 72^\circ$

$L = \dfrac{2\pi\ 15 \cdot 45^\circ}{360^\circ} = 15{,}08$ cm

$A = \dfrac{\pi\ 12^2 \cdot 72^\circ}{360^\circ} = 90{,}48\ \text{cm}^2$

2. a) $A = \pi\,(9^2 - 7^2) = 100{,}53\ \text{cm}^2$

b) $A = \dfrac{\pi\,(12^2 - 9^2) \cdot 27^\circ}{360^\circ} = 14{,}84\ \text{cm}^2$

3. a) Prisma

Área lateral $= 14 \cdot 10 = 140\ \text{cm}^2$

Área total $= A_L + 2 \cdot A_{BASE} =$
$= 140 + 2 \cdot 12 = 164\ \text{cm}^2$

Volumen $= V = (3 \cdot 4) \cdot 10 = 120\ \text{cm}^3$

b) Pirámide

Área lateral $= \dfrac{(2 \cdot 6)\sqrt{52}}{2} = 43{,}26$ cm

Área total $= A_L + A_{BASE} =$
$= 43{,}26 + \dfrac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} = 43{,}26 + 10{,}39 = 53{,}65\ \text{cm}^2$

Volumen $= \dfrac{\dfrac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 7}{3} = 24{,}24\ \text{cm}^3$

c) Cilindro

Área lateral $= 2\pi\,5 \cdot 25 = 785{,}4\ \text{cm}^2$

Área total $= A_L + 2 \cdot A_{BASE} =$
$= 785{,}4 + 2 \cdot \pi\ 5^2 = 785{,}4 + 157{,}08 =$
$= 942{,}48\ \text{cm}^2$

Volumen $= \pi\ 5^2 \cdot 25 = 1\,963{,}5\ \text{cm}^3$

4. El volumen de cada trozo de tarta será una doceava parte del volumen de un cilindro cuya base tiene un radio de 15 cm y una altura de 6 cm.

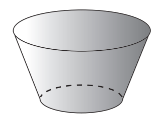
$V_{TROZO} = \dfrac{\pi\ 15^2 \cdot 6}{12} = 353{,}43\ \text{cm}^3$

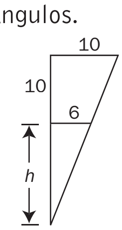
5. Coincide con el volumen del tronco de cono cuyas dimensiones coinciden con las de la maceta.

Primero se halla h por semejanza de triángulos.

$\dfrac{10 + h}{10} = \dfrac{h}{6}$

$h = 15$ cm





$V_{MACETA} = \dfrac{1}{3}\pi \cdot 10^2 \cdot (10 + 15) - \dfrac{1}{3}\pi \cdot 6^2 \cdot 15 =$
$= 2\,053{,}55\ \text{cm}^3$

6.

	Superficie esférica	Volumen
a)	$S = 4\pi 4^2 =$ $= 201{,}06\ \text{cm}^2$	$V = \dfrac{4}{3}\pi 4^3 =$ $= 268{,}08\ \text{cm}^3$
b)	$S = 4\pi 7^2 =$ $= 615{,}75\ \text{cm}^2$	$V = \dfrac{4}{3}\pi 7^3 =$ $= 1\,436{,}75\ \text{cm}^3$
c)	$S = 4\ \pi\ 8{,}5^2 =$ $= 907{,}92\ \text{cm}^2$	$V = \dfrac{4}{3}\pi\ 8{,}5^3 =$ $= 2\,572{,}44\ \text{cm}^3$

7. La cantidad de aire introducido es igual a la diferencia que hay entre los volúmenes del globo después de inflado y antes de inflado.

$$\frac{4}{3}\pi(15^3 - 5^3) = 13\,613{,}57\ \text{cm}^3$$

8. Al girar la figura se origina un cono, cuya base tiene un radio de 5 cm, y una generatriz de 11 cm, coronado por una esfera de 2 cm de radio.

$A_T = A_T\,(cono) + A\,(Superficie\ esférica) =$
$= \underbrace{(\pi 5 \cdot 11 + \pi 5^2)}_{cono} + \underbrace{4\pi 2^2}_{esfera} = 301{,}59\ \text{cm}^2$

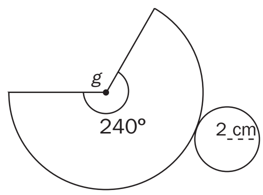
13 Áreas y volúmenes

1. Las caras de una pirámide regular de base cuadrada son triángulos equiláteros.

a) Halla el área lateral y el área total de la pirámide si la arista mide 30 cm.

b) Escribe expresiones para el área lateral y para el área total de la misma pirámide si la arista mide x cm^2.

2. Calcula el área total de un cono cuyo desarrollo es el de la siguiente figura:



3. Una esfera de radio 20 cm está inscrita en un cilindro, de forma que tiene un punto de contacto con cada base del cilindro. Calcula el área total del cilindro.

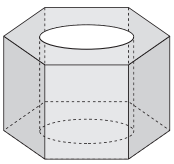
4. Una pieza tiene forma de prisma de base hexagonal, del que se ha extraído un cilindro central. Si las dimensiones de la pieza son:

Lado del hexágono 2 cm.

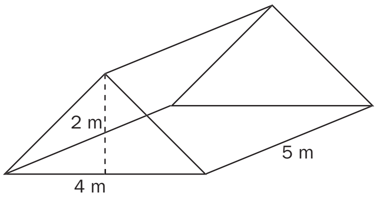
Altura de la pieza 3 cm.

Radio del cilindro 1,25 cm.

Calcula el área total y el volumen de la pieza.

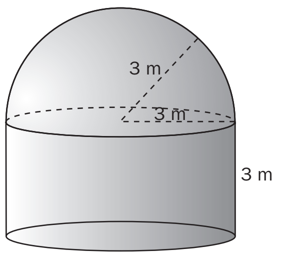


5. Una tienda de campaña tiene forma de prisma triangular isósceles como la de la figura:



Calcula el coste de fabricación si el material del suelo de la tienda cuesta 4 euros por m^2 y el material del resto tiene un precio de 2,75 euros por m^2.

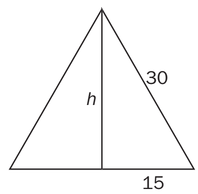
6. Calcula el tiempo que tarda en llenarse un depósito de combustible como el de la figura, si se sabe que se vierten $\frac{\pi}{2}$ litros por segundo.



SOLUCIONES

1. a) Se necesita conocer la altura de las caras laterales de la pirámide.

$h = \sqrt{30^2 - 15^2} = 25{,}98$ cm



$\text{A. lateral} = 4 \cdot \dfrac{30 \cdot 25{,}98}{2} =$

$= 1\,558{,}8\ \text{cm}^2$

A. total = área de la base + área lateral =
$= 900 + 1\,558{,}8 = 2\,458{,}8\ \text{cm}^2$

b) En una pirámide de esta forma con arista x.

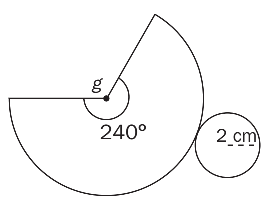
$$h = \sqrt{x^2 - \left(\frac{x}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{3x^2}{4}} = \frac{x\sqrt{3}}{2} = 0{,}87x \text{ cm}$$

$$\text{A. lateral} = 4 \cdot \frac{x \cdot \dfrac{x\sqrt{3}}{2}}{2} = 1{,}73x^2 \text{ cm}^2$$

A. total = área de la base + área lateral =

$= x^2 + 1{,}73x^2 = x^2(1 + 1{,}73) = 2{,}73x^2\ \text{cm}^2$

2. El área pedida coincide con el área total de la figura.



La longitud de la circunferencia pequeña coincide con la longitud del sector de circunferencia.

Igualando los datos, se tiene:

$$4\pi = \frac{2\pi \cdot g \cdot 240^\circ}{360^\circ} \Rightarrow g = 3 \text{ cm}$$

Luego el área total es:

$$\text{A. total} = 2^2 \cdot \pi + 9 \cdot \pi \cdot \frac{240^\circ}{360^\circ} = 10\pi \text{ cm}^2$$

3. Observando la figura se tiene:

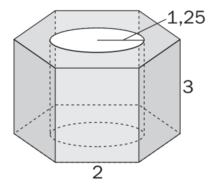
Radio base del cilindro, $r = 20$ cm.

Altura cilindro = diámetro esfera = $h = 40$ cm

Área total $= 2 \cdot \pi \cdot 20^2 + 40 \cdot \pi \cdot 40 = 2\,400\pi\ \text{cm}^2$

4. A partir de la figura se observa que el área total de la pieza es igual a:

$\text{A. lateral}_{\text{PRISMA}} + \text{A. lateral}_{\text{CILINDRO}} +$
$+ 2\,(\text{A}_{\text{HEXÁGONO}} - \text{A}_{\text{CÍRCULO}})$



A. lateral =

$$= 6 \cdot 2 \cdot 3 + 2\pi \cdot 1{,}25 \cdot 3 + 2\left(\frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} - \pi\ 1{,}25^2\right) =$$

$= 70{,}53\ \text{cm}^2$

Para el volumen se tiene que:

$V_{\text{TUERCA}} = V_{\text{PRISMA}} - V_{\text{CILINDRO}} =$

$$= \frac{12 \cdot \sqrt{3}}{2} \cdot 3 - \pi\ 1{,}25^2 \cdot 3 = 16{,}45 \text{ cm}^3$$

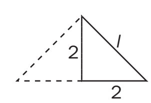
5. El área del suelo es: $4 \cdot 5 = 20\ \text{cm}^2$

El área de los triángulos isósceles es:

$$2 \cdot \frac{2 \cdot 4}{2} = 8 \text{ cm}^2$$

Para hallar el área de los dos rectángulos que faltan se necesita saber la longitud de los lados iguales del triángulo isósceles.

$l = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$ cm



Y el área de los rectángulos es:

$2(5 \cdot \sqrt{8}) = 10\sqrt{8} = 28{,}28\ \text{cm}^2$

Luego el gasto es:

$20 \cdot 4 + (8 + 28{,}28) \cdot 2{,}75 = 179{,}77$ euros.

6. El volumen del depósito es:

$$V = 3^2\pi \cdot 3 + \frac{2}{3}\pi 3^3 = 45\pi\ l = 45\,000\pi\ l$$

Como se vierten $\dfrac{\pi}{2}$ litros por segundo, el tiempo empleado es:

$$\frac{45\,000\pi}{\dfrac{\pi}{2}} = 90\,000 \text{ segundos} = 25 \text{ horas}$$