Atención a la diversidad: Unidad de Geometría
TEOREMA DE PITÁGORAS

INTRODUCCIÓN

La L.O.G.S.E., ya desde su preámbulo, recoge la necesidad de una diversificación creciente que permita asumir mejor los intereses diferenciados de los alumnos, adaptándose a la pluralidad de sus necesidades y aptitudes, con el fin de posibilitarles que alcancen los objetivos comunes de la Educación Secundaria. Como consecuencia, en esta etapa, la metodología didáctica deberá adaptarse a las características de cada alumno (necesidades, aptitudes, ritmos de aprendizaje, motivación, etc.)

El documento que aquí presentamos no es una adaptación curricular dirigida a un alumno determinado, se trata de una propuesta para el desarrollo de una unidad didáctica teniendo en cuenta la diversidad del alumnado. Partimos de una situación normal, es decir, un aula de 30 alumnos con un sólo profesor (sin apoyo). En estas condiciones y siendo realistas, creemos que al proceso de enseñanza-aprendizaje puede llevarse a cabo, como máximo, en tres niveles diferentes.

Para formar los grupos correspondientes a los tres niveles, partimos de los resultados recogidos en una evaluación inicial. Esta evaluación puede ser la realizada a comienzo de curso, o bien, una específica relacionada con el tema que tratamos **El Teorema de Pitágoras**. En un primer nivel, se agruparán los alumnos con mayores dificultades, aquellos que en la evaluación inicial han mostrado carencias en conceptos y procedimientos específicos de la Geometría. En el segundo grupo se desarrollará por alumnos que muestran capacidades acordes con el nivel de 3º de E.S.O. Por último en el tercer nivel se agrupan los alumnos con una motivación alta y con una buena capacidad de abstracción

La unidad didáctica desarrollada, está encuadrada dentro del bloque de **Geometría** en la programación de 3º de E.S.O.. Los objetivos que los alumnos de los tres niveles deberán alcanzar son los siguientes:

Objetivos específicos:

- Conocer y comprender el Teorema de Pitágoras.
- Resolver triángulos rectángulos.
- Aplicar de forma correcta el Teorema de Pitágoras a la resolución de problemas y situaciones presentes en la vida cotidiana.

Relacionados con los siguientes objetivos de área:

Objetivos de área:

- Conocer las formas y relaciones espaciales que se presentan en la realidad, analizando las propiedades y relaciones geométricas implicadas y siendo sensibles a la belleza que generan.
- Elaborar estrategias personales para el análisis de situaciones concretas y la identificación y resolución de problemas, utilizando las formas de pensamiento lógico, contrastando los resultados y reflexionando sobre el proceso seguido.

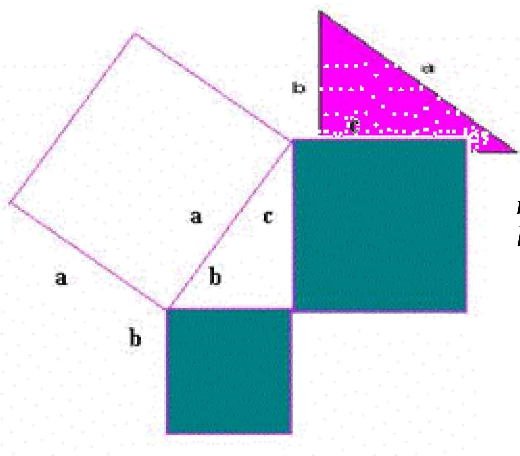
DESARROLLO TEÓRICO DEL TEMA

- **Enunciado del Teorema de Pitágoras**
- **Demostraciones**
- **¿Qué podemos calcular usando el Teorema de Pitágoras?**
- **El recíproco del Teorema de Pitágoras**
- **Clasificación de un triángulo conocidos sus tres lados**

ENUNCIADO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

"*En todo triángulo rectángulo se cumple que el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos*"

$a^2 = b^2 + c^2$



Este enunciado es equivalente al siguiente:

"El área de un cuadrado situado en la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a la suma de las áreas de los cuadrados situados sobre los lados que contienen el ángulo recto".

DEMOSTRACIONES DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

Primera demostración:

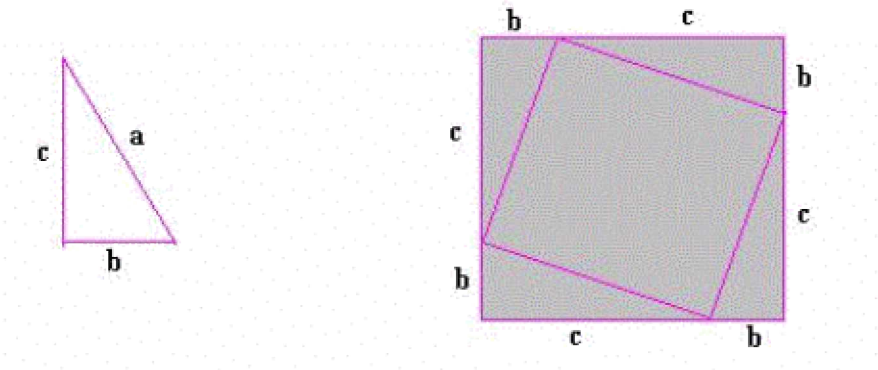
- Construye un triángulo rectángulo, y sobre cada uno de sus lados traza un cuadrado.
- Recorta el cuadrado más pequeño.
- Sobre el cuadrado mediano traza dos rectas que pasando por su centro sean paralelas a los lados del cuadrado grande.
- Ahora recorta el cuadrado mediano en cuatro trozos siguiendo las rectas anteriores.

  ¿ Eres capaz de acoplar todos los trozos recortados de forma que llenen el cuadrado grande? Has demostrado un teorema. ¿Cuál?.

Segunda Demostración

Vamos a realizar otra demostración del Teorema de Pitágoras.

Observa el siguiente dibujo:



- Observa los dos cuadrados que aparecen en el dibujo, uno exterior y otro dentro de éste.
- Observa además los cuatro pequeños triángulos de la figura.
- Calcula el área del cuadrado grande (Recuerda que es lado al cuadrado), opera la expresión que hallas obtenido.
- Como observarás el área del cuadrado grande también se puede obtener sumando el área del cuadrado pequeño más el área de los cuatro triángulos. Calcula cuanto vale esta suma.
- Iguala las dos expresiones del área que has obtenido en los dos apartados anteriores y simplifica.

Área del cuadrado grande igual área del cuadrado pequeño más el área de los cuatro triángulos

Has llegado a la expresión $a^2 = b^2 + c^2$

¿Qué has demostrado?

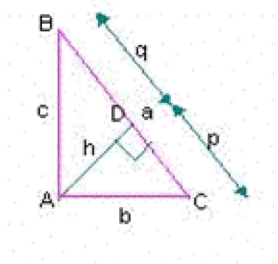
Tercera Demostración

Veamos otra demostración de este importante teorema.

Observa con atención el siguiente dibujo:

Hemos trazado la altura h correspondiente a la hipotenusa.

- Por ser h la altura correspondiente a la hipotenusa……………AD⊥BD
- Si en el triángulo rectángulo se traza la altura correspondiente a la hipotenusa, cada cateto es media proporcional entre la hipotenusa "a" y la proyección sobre ella



$\frac{a}{b} = \frac{b}{p}$ $\frac{a}{c} = \frac{c}{q}$

- Transforma estas dos igualdades en otras dos igualdades pero sin que aparezcan denominadores.

- Suma ambas expresiones
- Saca "a" factor común.
- Sustituye ahora p+q por a, pues a = p+q (observa el dibujo).

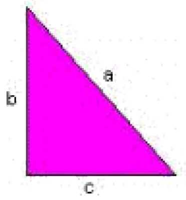
Has llegado de nuevo a la expresión

$a^2 = b^2 + c^2$

¿QUÉ PODEMOS CALCULAR APLICANDO EL TEOREMA?

Partimos de la expresión que encontró Pitágoras:

$$a^2 = b^2 + c^2$$



¿Cómo calculamos la hipotenusa si conocemos el valor de los dos catetos de un triángulo rectángulo?

- Sacamos raíz cuadrada en ambos miembros de la expresión del Teorema de Pitágoras.

$\sqrt{a^2} = \sqrt{b^2 + c^2}$

- Simplificamos.

$a = \sqrt{b^2 + c^2}$

¿Cómo calculamos el valor de un cateto si conocemos el otro cateto y la hipotenusa de un triángulo rectángulo?

- De la expresión del Teorema de Pitágoras despejamos b^2

$b^2 = a^2 - c^2$

- Sacando raíz cuadrada de ambos miembros, resulta:

$b = \sqrt{a^2 - c^2}$

Si repetimos el procedimiento anterior pero despejando c^2, llegamos a obtener como valor del otro cateto:

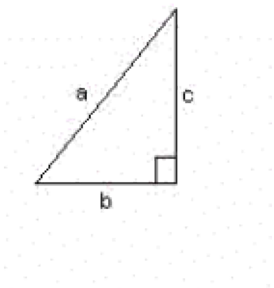
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$

Ahora es el momento de realizar algunos ***ejemplos.***

EL RECÍPROCO DEL TEOREMA DE PITÁGORAS

"Si en un triángulo se cumple que la suma de los cuadrados de dos de sus lados es igual al cuadrado del otro lado, entonces el triángulo es rectángulo (tiene un ángulo recto)".

$$a^2 = b^2 + c^2 \quad \Rightarrow$$



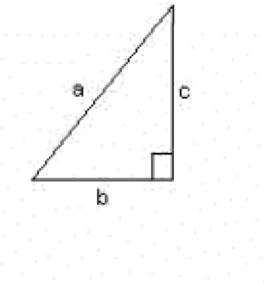
Es el momento en el que al alumno se le plantean diferentes valores para los lados de un triángulo y debe de ser capaz de deducir si el triángulo al que corresponden dichos lados es rectángulo o no.

CLASIFICACIÓN DE UN TRIÁNGULO CONOCIDOS SUS TRES LADOS

Analizando el Teorema de Pitágoras podemos clasificar los triángulos atendiendo a la relación entre sus lados.

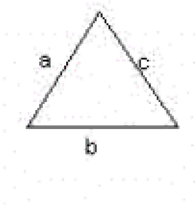
- **Un triángulo es rectángulo si el cuadrado del lado mayor es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos lados.**

Si $a^2 = b^2 + c^2 \Longrightarrow$ **TRIÁNGULO RECTÁNGULO**



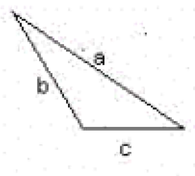
- **Un triángulo es acutángulo si el cuadrado del lado mayor es menor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.**

Si $a^2 < b^2 + c^2 \Longrightarrow$ **TRIÁNGULO ACUTÁNGULO**



- **Un triángulo es obtusángulo si el cuadrado del lado mayor es mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados.**Sí

Si $a^2 > b^2 + c^2 \Longrightarrow$ **TRIÁNGULO OBTUSÁNGULO**



Al igual que en el apartado anterior debemos trabajar con ejemplos concretos, dando valores a los lados de triángulos y dejar que los alumnos los clasifiquen. Así valoraremos el grado de asimilación de los conceptos.

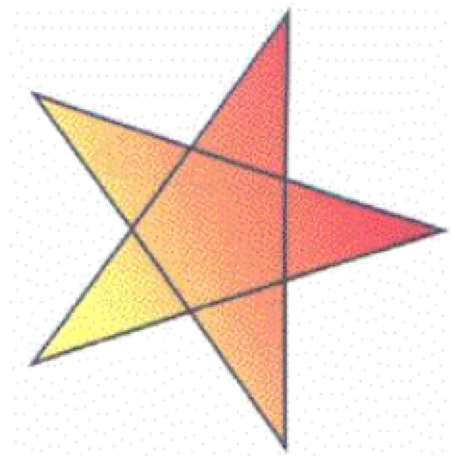
ANTECEDENTES HISTÓRICOS

PITÁGORAS

Pitágoras nació en Samos, colonia Jónica de los Griegos situada en las costas del Oriente Mediterráneo. Vivió desde el 569 a.C. hasta el 500 a.C. Alrededor del 530 a C. se instaló en Crotona, ciudad de la colonia Dórica en el sur de Italia donde fundó la Escuela Pitagórica que llegó a convertirse en una asociación científica, religiosa y filosófica, apoyada en la creencia de la inmortalidad del alma, la doctrina de la reencarnación la práctica vegetariana y un sistema de enseñanza basado en la gimnasia, las matemáticas y la música.

A sus enseñanzas acudían entusiastas de todas las clases sociales, incluso mujeres que infringían la ley que les prohibía asistir a reuniones públicas.

Al amparo del maestro, sus discípulos Se organizaron en sociedad o hermandad y se les conocía por la Orden de Pitágoras, muy pronto ejercieron gran influencia en todo el mundo griego. Los miembros de la sociedad lo compartían todo, sostenían creencias religiosas, se dedicaban a las mismas investigaciones y se comprometían con juramento a no revelar los secretos y las enseñanzas de la Escuela.
El concepto básico de los Pitagóricos era el Número y lo consideraban el principio de todo. Se les atribuye el descubrimiento de los Números Irracionales - la inconmensurabilidad de la diagonal del cuadrado - que parece ser el secreto mejor guardado de la Escuela.



El teorema de Pitágoras aparece enunciado por primera vez en los Elementos de Euclides pero se conocía desde mucho antes. Otro descubrimiento fue la observación de que cuando dos cuerdas de un instrumento musical vibran con sonidos armónicos , sus longitudes se encuentran en relación a números sencillos y aplicaron este conocimiento al principio de equilibrio de los planetas con una relación de distancias por sus movimientos armónicos que dio origen a la idea de la música de las esferas.

También creían que la Tierra giraba alrededor del Sol y éste a su vez, alrededor a un fuego central invisible.

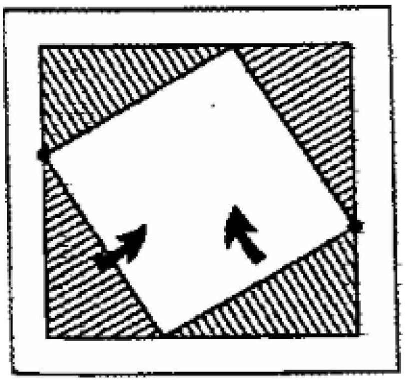
Los Pitagóricos consiguieron gran influencia en la Magna Grecia, lo que provocaría reacciones en su contra, de forma que, Pitágoras se vio obligado a retirarse a Metaponte donde , se dice, se dejó morir de hambre.
La hermosa Estrella Pentagonal era el símbolo distintivo de la Escuela Pitagórica.

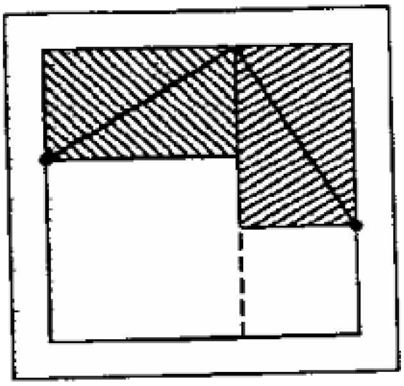
MOTIVACIÓN

Normalmente, el teorema de Pitágoras se aplica para calcular la longitud de un lado de un triángulo ractángulo, conocidas las medidas de los otros dos. La construcción de los modelos permite observar intuitivamente la relación entre los lados del triángulo rectángulo.

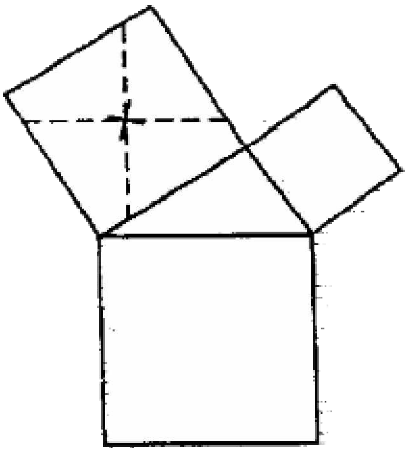
Una comprobación intuitiva se atrubuye al matemático hindú Bhaskara (1150 d.C.). Según él, no es necesaria ninguna explicación y se limita a escribir:

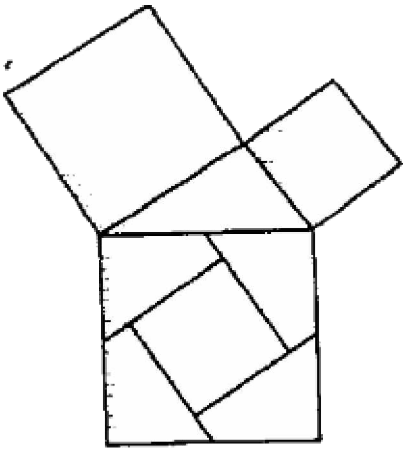
Mira la figura





Otra comprobación conocida se debe a Perigal. El cuadrado mediano se escinde en cuatro piezas, hallando primero su centro (por intersección de diagonales y trazndo después por él una paralela y una perpendicular a la hipotenusa del triángulo).





APLICACIONES. RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

- **Criterios y objetivos para clasificar los problemas**
- **Resolución de problemas**

CRITERIOS Y OBJETIVOS QUE SE HAN UTILIZADO PARA CLASIFICAR LOS PROBLEMAS.

CRITERIOS PARA CADA NIVEL

1. Los de nivel bajo son de aplicación directa del Teorema de Pitágoras (salvo el 8º). Para facilitar la comprensión se acompañan todos ellos de dibujos y en algunos ejercicios se indican pasos intermedios para llegar al resultado final(4º y 7º). En todos ellos se utilizan datos numéricos.

2. En los ejercicios de nivel medio la aplicación del Teorema de Pitágoras es directa o casi directa; se incide en que el alumno tenga que interpretar el enunciado, por eso algunos no llevan dibujos; prescinden de indicaciones intermedias, pero se siguen utilizando datos numéricos.

3. En los ejercicios de nivel avanzado, la aplicación del Teorema de Pitágoras requiere de una interpretación y planteamiento previo del problema. Se trabajan otros procedimientos en algunos problemas: planteamiento de ecuaciones (4º) y el uso del lenguaje algebraico en lugar de los datos numéricos (6º,7º y 8º).

OBJETIVOS PARA LOS PROBLEMAS

1º) y 2º) Aplicar el Teorema de Pitágoras conocidos dos datos.

3º) Descubrir que la distancia máxima entre dos puntos de un paralelogramo es la diagonal. Calcularla aplicando Pitágoras.

4º) Averiguar la altura de un triángulo o paralelogramo mediante Pitágoras, para poder calcular su área.

5º) Dada la diagonal de un cuadrado averiguar el lado.

6º) Calcular las generatrices en conos y troncos de conos.

7º) Calcular la diagonal de un ortoedro.

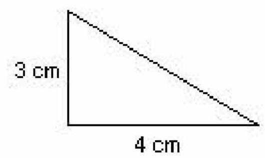
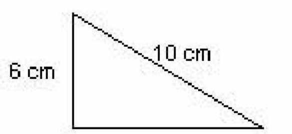
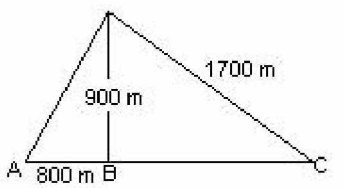
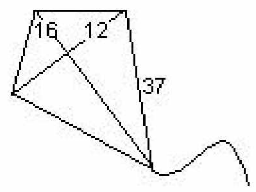
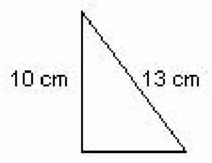
8º) Casos particulares del Teorema de Pitágoras generalizado.

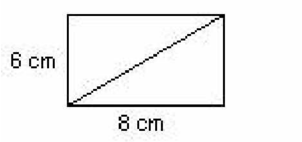
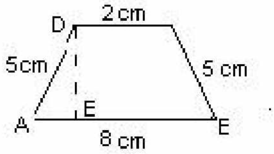
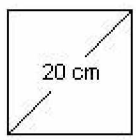
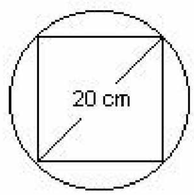
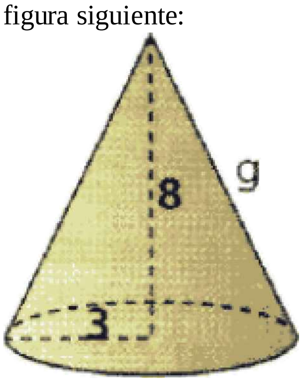
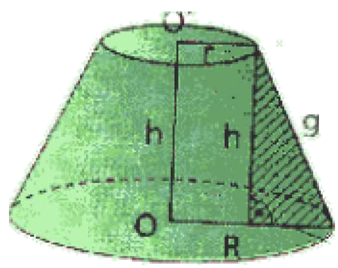
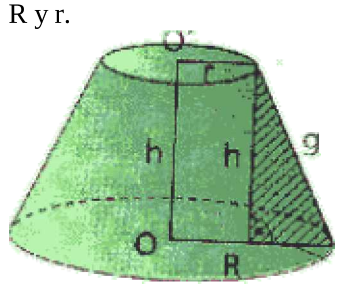
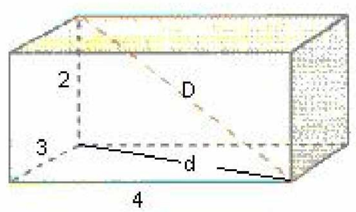
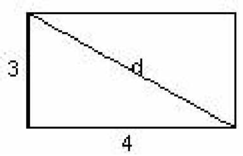
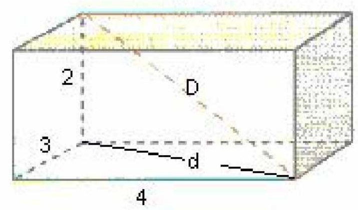
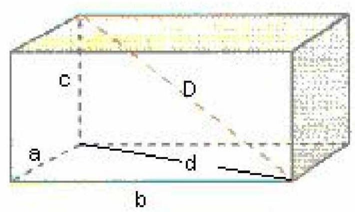
Para la resolución de problemas proponemos dos posibilidades:

- Presentar los ejercicios a los alumnos tal como están (con los tres niveles). El alumno se decide, con el asesoramiento del profesor, por un determinado nivel.

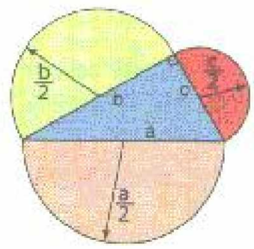
- Se separan los ejercicios por niveles y se entrega a cada alumno los correspondientes a su nivel.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

NIVEL BAJO	NIVEL MEDIO	NIVEL AVANZADO
1º) a) Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo de catetos 3 cm y 4 cm  b) Calcula el cateto del triángulo rectángulo de la figura: 	1º) El teleférico de la ciudad A sale de la base de una montaña sube hasta su cima y acaba en la ciudad C. Observa el siguiente esquema y calcula:  a. ¿Qué distancia recorre el teleférico desde la ciudad A hasta la cima? b. ¿Qué distancia hay ente las ciudades B y C?	1º) ¿ Cuánto debe medir el listón de madera que se necesita para construir el soporte interior y exterior de la cometa de la figura siguiente? 
2º) Indica a que distancia de la pared se encuentra la escalera de la figura siguiente: 	2º) Un albañil apoya una escalera de 5 m contra un muro vertical. El pie de la escalera está a 2m del muro. Calcula a que altura se encuentra la parte superior de la escalera.	2º) Un muchacho quiere cambiar la bombilla de un farol situado en una pared a 5´4 m de altura, con la ayuda de una escalera de 3´5 m de longitud. Si el muchacho puede llegar hasta los 2´25 m con el brazo extendido, ¿a qué distancia máxima de la pared tiene que colocar el pie de la escalera para conseguir su objetivo?
3º) Averigua la diagonal de un rectángulo de lados 6 cm y 8 cm. (Observa que es la mayor distancia en línea recta entre dos	3º) Los lados de una plaza rectangular mide 48 m y 64m. Si queremos recorrer la máxima distancia sin cambiar de dirección.	3º) ¿Cuál es la máxima distancia que puedes recorrer sin cambiar de dirección en una pista de patinaje con forma rombo si el

puntos del rectángulo).  	¿Cómo lo harías?. Calcula esa distancia.	lado es 26 m y la diagonal menor 40 m?
4º) Observa el trapecio isósceles de la figura siguiente y calcula:  a) La altura DE del trapecio observando que AED es un triángulo rectángulo. b) Área del trapecio	4º) Calcula el área de un trapecio isósceles de bases 2 cm y 8 cm y el lado igual 5 cm .(O bien calcular el área de un triángulo equilátero de lado 6 cm)	4º) Calcula el área de un trapecio isósceles de bases 2 cm y 8 cm y el lado igual 5 cm .(O bien calcular el área de un triángulo equilátero de lado 6 cm)
5º) Calcula el lado de un cuadrado sabiendo que la diagonal mide 20 cm.  	5º) Calcula el lado de un cuadrado sabiendo que está inscrito en una circunferencia de radio 10 cm  	5º) Un marmolista tiene una columna cilíndrica de radio 10 cm. ¿Cuáles son las dimensiones de la base de la mayor columna cuadrada que puede tallar en la columna cilíndrica?
6º) Averigua la generatriz g del cono de la figura siguiente:  	6º) Averigua la generatriz g del tronco de cono siguiente:  **R**=6 cm **r**=2 cm **h**=10 cm	6º) Expresa la generatriz g de un tronco de cono en función de la altura h y los radios R y r. 
7º) Vamos a calcular la diagonal D del ortoedro de la figura siguiente, para ello sigue las indicaciones siguientes:  a) Calcula la diagonal d del rectángulo de la base  b) Observa de nuevo la primera figura y calcula D.	7º) Calcula la diagonal D del ortoedro de la figura siguiente:  Indicación: Hay que utilizar dos veces el Teorema de Pitágoras.	7º) Expresa la diagonal D de un ortoedro en función de sus lados a, b y c. 

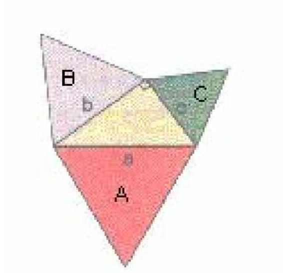
8º) Observa la figura siguiente y averigua las áreas A, B y C



c = 6 cm
b = 8 cm
a = 10 cm

Encuentra una relación entre las tres áreas. ¿Sabes por qué se cumple?

8º) Observa la figura siguiente y averigua las áreas A, B y C



c = 6 cm
b = 8 cm
a = 10 cm

Encuentra una relación entre las tres áreas. ¿Sabes por qué se cumple?

8º) Observa la figura siguiente y demuestra que el área de A es igual al área de B más el área de C.