FUNCIONES

Historia de las funciones

Leonhard Euler (1707-1783) fue el primero en definir con precisión el concepto de función y en realizar un estudio de todas las funciones elementales. En su obra Introductoria in Analysi Infinitorum, dio una primera definición de función.

Sin embargo, el concepto de función nació con las primeras relaciones observadas entre dos variables, hecho que seguramente surgió desde los inicios de la matemática en la humanidad, con civilizaciones como la babilónica, la egipcia y la china.

Antes de Euler, el matemático y filósofo francés René Descartes (1596-1650) mostró en sus trabajos de geometría que tenía una idea muy clara de los conceptos de “variable” y ”función’’ , realizando una clasificación de las curvas algebraicas según sus grados, reconociendo que los puntos de intersección de dos curvas se obtienen resolviendo, en forma simultanea, las ecuaciones que las representan.

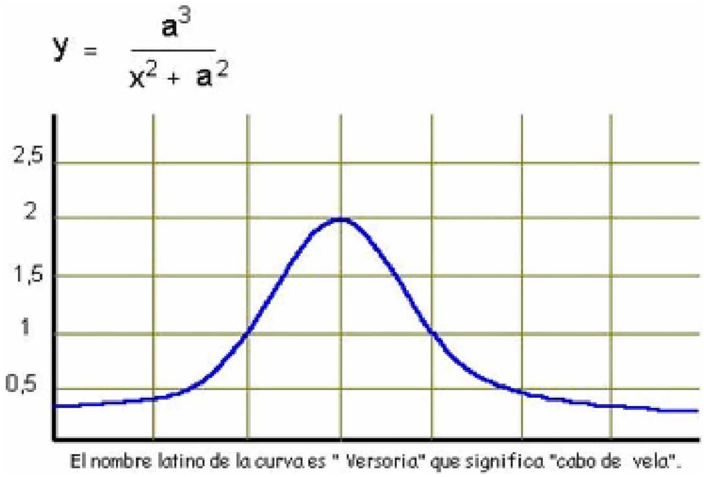
Una curva embrujada

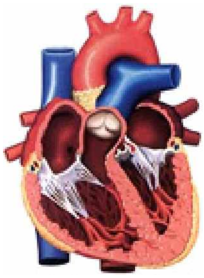
En los siglos XVII y XVIII se aceptaba, en Italia, la educación de las mujeres, a diferencia de otros países de Europa de entonces. Esto hizo posible que hubiese varias mujeres dedicadas a la enseñanza universitaria y al estudio de la Matemática y la Física.

La más eminente de ellas parecer ser Mana Gaetana Agnesi (1718 -1799), quien escribió varios tratados sobre matemáticas y dio nombre a una curva: la bruja Agnesi.

La razón de este nombre es la siguiente: En 1718, Grandi, que estudiaba la curva, le dio el nombre latino (en aquella época la gente culta escribía en latín) versoria porque la figura de la curva semejaba el de la “cuerda que dirige la vela”.

Grandi tradujo al italiano versoria por versiera y la curva pasó a llamarse ‘la versiera‘. John Colson, que tradujo al inglés el libro de Agnesi Instituzioni analitiche ad uso della gioventú italiana, confundió ‘la versiera‘ por l‘aversiera‘ (la bruja).





Cuando el corazón se desmadra

Algo más de una vez por segundo, nuestro corazón late, y salvo que estemos realizando un ejercicio que acelere su ritmo, lo hace con una aparente cadencia. Sin embargo, y además de las diferencias producidas por las enfermedades cardiacas, los ciclos de actividad y descanso, de estrés y relajación y otros factores objetivos, el ritmo de los latidos no sigue una pauta fija, no responde a una función conocida.

Diversos estudios realizados con individuos sanos a los que se les realizó un electrocardiograma (ECG) continuo durante varios días, muestran que el corazón se comporta de forma caótica, con secuencias irregulares, que no se han podido modelizar.

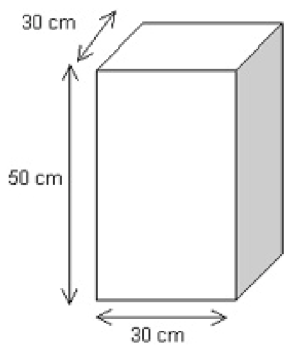
Lo curioso es que comparando estos ECG con los de pacientes enfermos del corazón, los de éstos resultan ser mucho más regulares, así que los médicos han concluido que sea cual sea la causa, el comportamiento caótico del corazón parece ser un buen indicador de salud cardiaca.

Problema 1

En el gimnasio de un colegio hay una gotera. Se coloca un recipiente con forma de ortoedro de dimensiones 30 cm x 30 cm x 50 cm. Si cada minuto caen en el recipiente 1 800 cm^3, ¿cuánto tiempo tardará en llenarse?

paso 1

Hacemos un dibujo del recipiente.



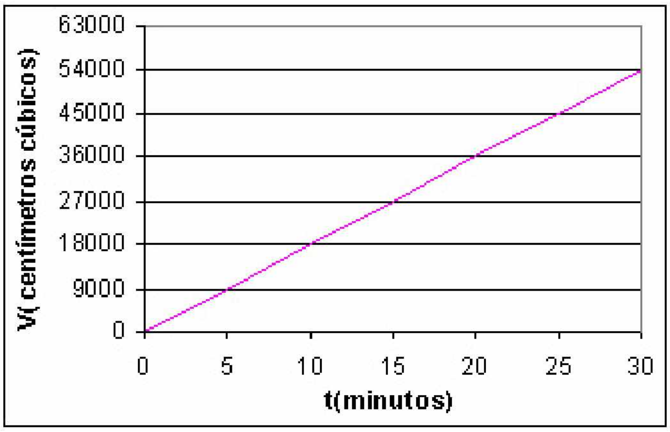
paso 2

Hacemos una tabla que recoja los valores de las variables.
Las variables son el tiempo y el volumen.
Expresamos el volumen en función del tiempo, teniendo en cuenta que cada minuto caen al recipiente 1 800 cm^3

t	0	5	10	15	20	25
V	0	9 000	18 000	27 000	36 000	45 000

paso 3

Representamos los datos gráficamente.

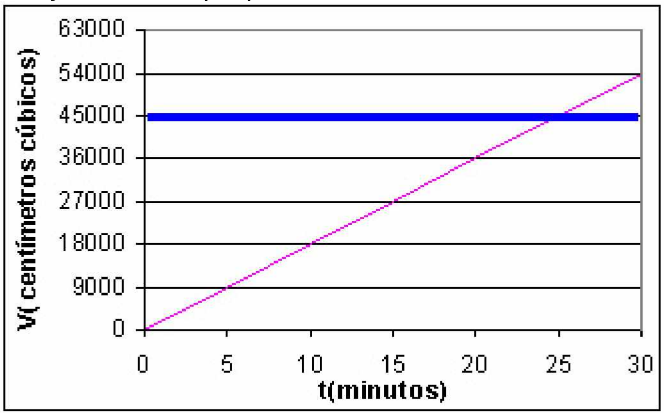


paso 4

Resolvemos el problema por tablas.
Calculamos el volumen de agua que cabe en el recipiente:
$V_{recipiente} = A^{base} \cdot h = 30 \cdot 30 \cdot 50 = 45\ 000\ cm^3$
Buscamos en la tabla que tiempo corresponde a este volumen.
El recipiente tardará en llenarse 25 minutos.

paso 5

Resolvemos el problema gráficamente.
Debemos ver en la gráfica qué valor de tiempo le corresponde un volumen de 45 000 cm^3. Trazamos una línea horizontal por la ordenada 45 000 y vemos en qué punto corta a la recta.



El punto de corte está en la abscisa **t = 25** minutos.

Problema 2

Una empresa de transporte de productos químicos recoge reactivos usados que han caducado para tratarlos y eliminarlos limpiamente. El porte mínimo de 10 kilogramos cuesta 90 euros, a partir de ahí, cada kilogramo reciclado cuesta 12 euros y de 100 kilogramos en adelante el precio es siempre el mismo.
Representa gráficamente el coste del transporte en función de los kilogramos de reactivos, e indica los intervalos de crecimiento y la tasa de variación de la función en el intervalo (50, 70) y (100, 200)

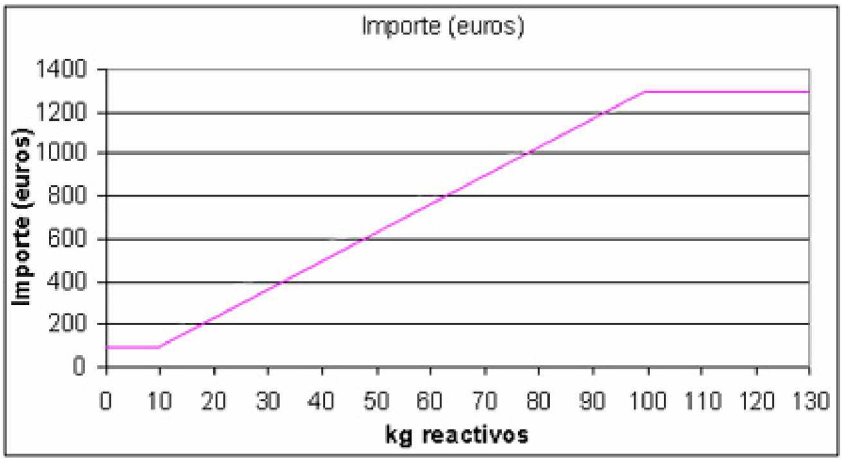
paso 1

Representamos los datos en una tabla
Hasta 10 kg el importe es de 90 euros. A partir de 10 kg debemos sumar a los 90 euros 12 euros por kg de reactivo. De 100 kg en adelante el importe es constante.

kg reactivos	0	1	10	20	30	40	...	100	120
Importe (euros)	90	90	90	330	450	690	...	1 290	1 290

paso 2

Representamos los datos gráficamente.
A partir de la tabla anterior, obtenemos la gráfica.



paso 3

Estudiamos los intervalos de crecimiento.
De 0 a 10 kg el precio es el mismo, por tanto, en el intervalo **(0, 10) la función es constante.**
De 10 a 100 kg el precio crece con el número de kilogramos. Por tanto en el intervalo **(10, 100) la función es creciente.**
De 100 kg en adelante, el precio vuelve a ser fijo. Por tanto, en el intervalo
(100, ∞) la función es constante.

paso 4

Calculamos las tasas de variación.
Intervalo (50, 70)
f(50) = 690
f(70) = 930
TV[50, 70] = 930 – 690 = **240**
Como la tasa de variación es positiva **en el intervalo (50, 70) la función es creciente.**

Intervalo (100, 200)
f(100) = 1 290
f(200) = 1 290
TV[100, 200] = 1 290 – 1 290 = **0**
Como la tasa de variación es nula **en el intervalo (100, 200) la función es constante.**

Gráfica de temperaturas

Vamos a crear algunas gráficas con datos reales. Por ejemplo, estudiemos la evolución de las temperaturas máximas en alguna ciudad. Aquí tienes recogidas las temperaturas máximas de algunas ciudades españolas durante un año.

	Media mensual de las temperaturas máximas en ºC													
Ciudad	Ene.	Feb.	Mar.	Abr.	May.	Jun.	Jul.	Ago.	Sep.	Oct.	Nov.	Dic.	Humedad	Horas de sol
Barcelona	13	14	16	18	21	25	28	28	25	21	17	13	68%	2.480 h.
A Coruña	13	13	15	16	17	20	22	23	22	19	15	13	78%	2.042 h.
Madrid	9	11	15	19	22	27	31	32	25	18	13	9	65%	2.824 h.
Palma de Mallorca	14	15	17	19	22	26	29	29	27	23	18	15	74%	2.795 h.
L.P. Gran Canaria	22	22	22	23	27	25	24	25	26	25	23	21	74%	2.998 h.
Santander	12	12	14	15	17	20	22	23	21	18	15	12	78%	1.747 h.
Sevilla	15	18	21	24	27	32	36	38	32	26	20	16	70%	2.878 h.
Valencia	15	16	18	20	23	26	28	29	27	23	19	16	68%	2.538 h.
Valladolid	7	10	14	17	20	26	29	29	25	18	12	8	68%	2.584 h.
Zaragoza	10	12	17	19	23	27	31	30	26	20	14	10	67%	2.824 h

a) Representa gráficamente los datos de Gran Canaria.
b) Indica intervalos en los que la tasa de variación sea nula, positiva y negativa. ¿Qué nos dicen estas tasas de variación con respecto al crecimiento o decrecimiento de la función?
c) ¿Es continua la función?
d) ¿Cuándo se produce un máximo absoluto de temperatura en Gran Canaria? ¿Cuánto vale? ¿Y en Valladolid? ¿Cuánto vale?

Estudio gráfico de datos

Vamos a estudiar la evolución de una canción en las listas de los 40 Principales.

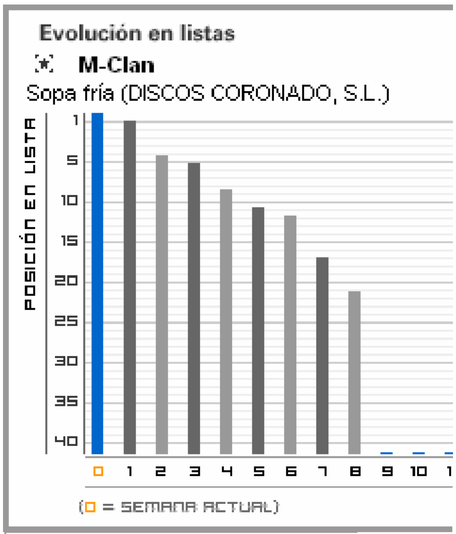
a) Elige una canción que te guste. En LISTAS ANTERIORES, podrás ir viendo el puesto que ocupó dicha canción en las semanas anteriores. (Elige una que haya estado varias semanas en la lista). Realiza una tabla con el puesto de la canción en cada semana.

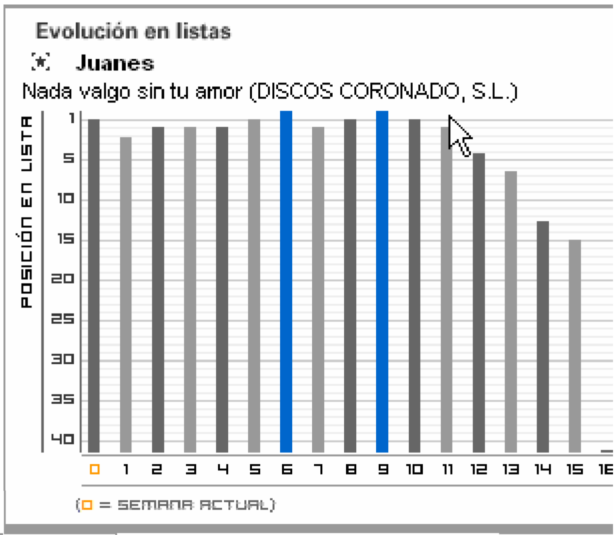
b) Representa estos datos en un gráfico.

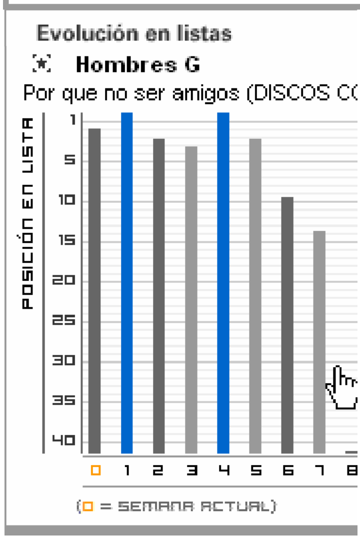
c) ¿Es una función continua? ¿Por qué?

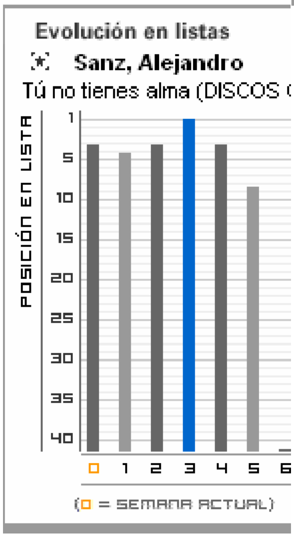
d) ¿Se mantiene la canción durante varias semanas en el mismo puesto?

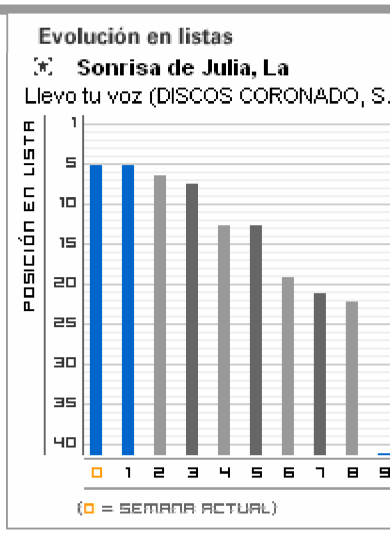
e) ¿Cuál es el máximo de la gráfica? ¿Y el mínimo?











Instrumentos con función

Parece ser que la forma y la estructura de muchos de los instrumentos musicales que conocemos tiene relación con ciertos conceptos matemáticos. Por ejemplo una curva exponencial que es aquella descrita por la función y = k elevado a x, para k mayor que 0, tiene una forma muy concreta que es precisamente la que imitan ciertos instrumentos, sean de cuerda o de viento. Por ejemplo un trombón o un órgano tienen formas que se curvan de igual modo que la exponencial.

El estudio de la naturaleza de los sonidos musicales alcanzó su apogeo con el trabajo del matemático John Fourier en el siglo XIX. Este científico comprobó que todos los sonidos musicales, tanto vocales como instrumentales, se podían describir por medio de expresiones matemáticas, que eran simples funciones periódicas o sumas de ellas. Cada sonido tiene tres cualidades, pitch, loudness y quality, que son las que hacen que podamos distinguir uno de otro. Y estas tres cualidades descubiertas por Fourier hicieron también posible que se pudiera representar y distinguir gráficamente el sonido. Pitch se relaciona con la frecuencia de la curva, loudness con la amplitud y quality con la forma de la función periódica. Las funciones periódicas fueron esenciales en el diseño de los instrumentos musicales y muchos fabricantes comparan las curvas producidas por los sonidos periódicos al diseño de formas perfectas para el instrumento de que se trate.